Ausgabe 03_2016

BLICKWECHSEL #03

Beiträge zu einer inklusiven Waldorfpädagogik

Blickwechsel_3

Inhalt

LIEBE LESERIN, LIEBER LESER!

Wir freuen uns sehr, dass Sie auch heute den neuen Blickwechsel zur Hand genommen haben, und hoffen, dass Sie ihn mit Interesse lesen werden!

Vielleicht ist Ihnen aufgefallen, dass schon mit den Umschlägen dieser ersten drei Hefte in der sich Stufe für Stufe entwickelnden Farbigkeit eine Reihe angelegt ist. Am Ende der drei Jahre, die für das Projekt „Entwicklungsimpulse durch inklusive Pädagogik“ veranschlagt sind, werden wir einmal durch den Farbkreis gewandert sein.

Dieser Weg in der Schrittfolge der Farben ist Programm. Aus immer neuer Perspektive möchten wir die Frage nach inklusiver Waldorfpädagogik stellen. Dabei soll auch der Charakter der Darstellungen verschieden sein.

Das erste Heft hatte ein menschenkundliches Motiv zum Einstieg – die physischen und die ätherischen Kräfte in der Pädagogik. Das zweite knüpfte direkt an die UN-Konvention für die Rechte von Menschen mit Behinderung an und differenzierte zwischen inklusivem Leben und gemeinsamem Lernen in der Schule.

Das Ihnen nun vorliegende Heft stellt detailreich eine Oberstufenepoche für Mathematik unter inklusiven Gesichtspunkten vor. Der Autor, Florian Schulz, geht dabei bis in die Erläuterung einzelner Aufgabenstellungen in die Unterrichtspraxis hinein. Trotzdem ist es nicht nur ein Heft für Mathematiker, sondern soll darüber hinaus die Möglichkeit geben, allgemeinpädagogische Gesichtspunkte aus dem Konkreten abzuleiten.

Obwohl Florian Schulz seit vielen Jahren als Mathematiklehrer an einer inklusiven Waldorfschule tätig ist, macht er deutlich, dass die Forschung zur Methodik eines inklusiven Oberstufenunterrichtes noch ganz am Anfang eines langen Entwicklungsweges steht. Es ist sehr zu wünschen, dass viele Kolleginnen und Kollegen seinen Staffelstab aufnehmen und ihrerseits Versuche und Erfahrungen mit heterogenen Schülergruppen in den kollegialen Diskurs einbringen werden.

Wir wünschen anregende Lektüre und grüßen herzlich!

Für die Redaktion

Bärbel Blaeser

Bärbel Blaeser

KOMBINATORIK

— EINE INKLUSIVE EPOCHE IN DER 9. KLASSE

von Florian Schulz

Als die ersten Waldorfschulen in der Mitte der 1990er Jahre begannen, auch Kinder mit Behinderung in ihre Klassen aufzunehmen, wurde über die Möglichkeiten und Grenzen von Integration – später Inklusion – viel diskutiert:

Geht das überhaupt – Kinder mit und Kinder ohne Behinderung in einer gemeinsamen Klasse? Welche Folgen hat das für die sogenannten „normal begabten“ Kinder? Welche für die Kinder mit Behinderung? Nicht zuletzt: Welche Folgen hat das für unsere bewährte Schullandschaft, für unsere Förder- (damals noch Sonder-) schulen und ihre Lehrerinnen und Lehrer? Kann man einen solchen Schritt überhaupt verantworten?

Zu diesem Zeitpunkt hatte allerdings in den Kindergärten die Umgestaltung der Einrichtungen im Sinne der Inklusion längst Fahrt aufgenommen, und inzwischen gibt es in den meisten Bundesländern überhaupt keine rein heilpädagogischen Kindergärten mehr. Die Entwicklung beginnt also bei den kleinen Kindern! Dort wo miteinander gespielt, gegessen, wo miteinander gelebt wird, dort beginnt der Abbau von Barrieren, von Vorurteilen und gruppenweisen Sonderungen: „die Autisten“, „die Kinder mit Down-Syndrom“, überhaupt: „die Behinderten“.

Dass Inklusion im Kindergarten gelingen kann, ja, notwendig ist, darüber gibt es inzwischen auch gesellschaftlich weitgehenden Konsens, obwohl die grundsätzlichen Diskussionen seitdem nicht abgeflaut sind.

Aber wie ist die Lage in den Schulen? Ist nicht gerade der Lebensabschnitt des Schulalters und mit ihm des allmählichen Erwachens an der Welt und zu sich selbst eine Phase, die eine größtmögliche Zielgenauigkeit der individuellen Förderung nötig macht?

In dieser Auseinandersetzung kann die Waldorfpädagogik aus der ihr zugrunde liegenden Menschenkunde einen einzigartigen Beitrag geben. Schon in seinen allerersten Darstellungen zur Pädagogik[1] entwickelt Rudolf Steiner den Gedanken, dass alles Lernen im Leben wurzelt – in den Lebenskräften des Menschen. Erkenntnis ist erwachendes Leben! Und gute Pädagogik gestaltet in künstlerischer Weise eben diesen atmenden Rhythmus zwischen träumend-schlafendem Leben in der Gemeinschaft und mehr und mehr erwachendem individuellem Lernen.

Rudolf Steiner:[1]
Die Erziehung des Kindes vom Gesichtspunkt der Geisteswissenschaft, Dornach 1981

Jede Unterrichtsphase, jeder Tageslauf, jede Epoche und auch die gesamte Schulbiografie eines Kindes unterliegt diesem feinen Wechsel aus Schlafen und Wachen, und jeder Lehrer, jede Lehrerin weiß, wie entscheidend für ein vertieftes und gründliches Lernen ein waches, aufmerksames Erarbeiten von Unterrichtsinhalten ist, wie entscheidend aber auch das Loslassen, das Einschlafen, das Vergessen sind. Erst ein harmonisches Zusammenspiel verschiedener Tätigkeiten ermöglicht gesundes Lernen.

Schaut man über die gesamte Schulzeit der Kinder, so wird deutlich, dass sich die Gewichtung von Schlafen und Wachen durch die Schuljahre hindurch verschiebt. Während die jungen Schulkinder noch einen Großteil ihrer Schulzeit in träumerischer Hingebung verbringen, fordern wir von den älteren und ältesten Schülerinnen und Schülern lange Zeiten konzentrierter, wacher Aufmerksamkeit.

Mit dieser enormen Steigerung von Wachheit, die wir vor allem mit Eintritt in die obere Mittelstufe und dann in die Oberstufe bemerken, geht auch eine zunehmende Distanzierung gegenüber den gegebenen Verhältnissen einher. Die Jugendlichen stehen nicht nur einem Unterrichtsgegenstand wach gegenüber, sondern auch ihren Mitmenschen, den Lehrerinnen und Lehrern, aber auch ihren Mitschülern: Wer bist du? Wie verhältst du dich? Wie bin ich selbst, in meinem Verhältnis zu dir?

Gerade diese Distanzierungsbewegungen werfen bis heute bei vielen Lehrerinnen und Lehrern Zweifel auf, ob in dieser Lebensphase Inklusion eigentlich gelingen kann. Werden die intellektuell stark begabten Jugendlichen ihre Klassenkameraden mit Behinderung nicht ablehnen? Wird nicht die unterschiedliche Leistungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler in den verschiedenen Fächern zu einer sozialen Ausgrenzung führen? Vor allem aber: Werden wir genügend pädagogische Fantasie entwickeln, auch zunächst wenig künstlerisch anmutende Unterrichtsgegenstände so aufzubereiten, dass junge Menschen vielfältiger Begabungsprofile daran selbstbewusst und erfolgreich arbeiten können? Gerade die Waldorfpädagogik hat ja mit ihrem künstlerischen Grundansatz ein methodisches Mittel in der Hand, das die Möglichkeit bietet, jeden Unterrichtsgegenstand für die individuellen Schülerinnen und Schüler zu öffnen. Doch wie ist das mit einem Fach wie der Mathematik, das sich auf den ersten Blick so ganz und gar einer künstlerischen Öffnung widersetzt?

Im Weiteren wählen wir nun eine konkrete Mathematikepoche der Oberstufe aus, um dieser Frage einmal gründlich, bis hinein in einzelne Aufgabenstellungen, nachzugehen. Und doch wendet sich diese Darstellung nicht nur an Mathematiklehrer. Vielmehr soll exemplarisch dargestellt werden, wie eine qualitativ-differenzierende Öffnung der Mathematik in der Mittel- und Oberstufe möglich sein kann. Folgende Überlegungen begleiten uns dabei:

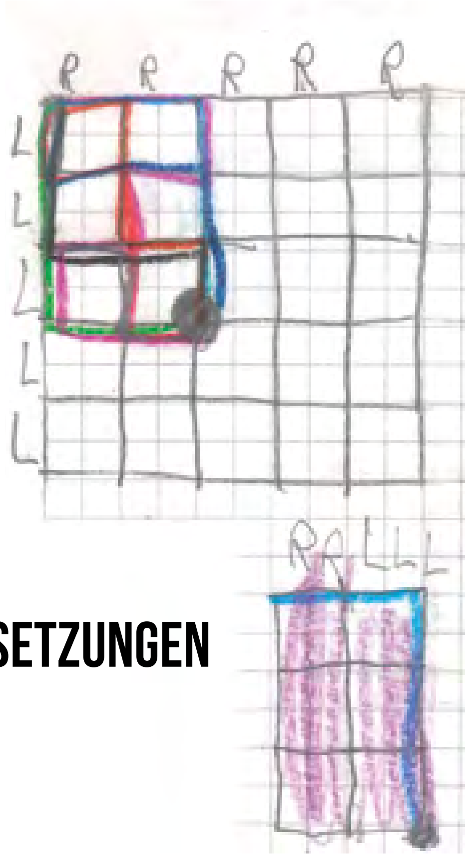
1. Wie stimme ich eine Klasse mit prägnant unterschiedlichen Schülerinnen und Schülern auf ein gemeinsames Thema so ein, dass die Aufgabenstellung für die Motivation der Jugendlichen „Gewicht“ bekommt?

2. Finde ich qualitativ unterschiedliche Zugänge ins Thema, die die Kraft haben, nebeneinander gleichgewichtig stehen zu können? Wird an der Qualität der Zugänge deutlich, dass jeder Schüler seinen Beitrag zur Gemeinschaft gibt, so dass die Erarbeitung erst vollständig wird, wenn alle teilhaben?

3. Lässt sich die Zielsetzung individualisieren? Empfinden die Schülerinnen und Schüler sich und ihre individuellen Zugänge als „gebraucht“? Und: Gelingt es,

den einzelnen Jugendlichen auch in inklusiven Settings den Widerstand im Willen zu bieten, den sie benötigen, um sich an den Herausforderungen entwickeln zu können?

4. Wie gestalte ich die gegenseitige Wahrnehmung und Teilhabe der Schülerinnen und Schüler? Wie wird aus vielen Einzelbeiträgen ein gemeinsames Projekt?



INNERE UND ÄUSSERE VORRAUSSETZUNGEN

DIE KOMBINATORIK ALS THEMA FÜR DIE 9. KLASSE

Die Kombinatorik ist ein Thema des Mathematikunterrichts der 9. Klasse. Hier geht es zum Beispiel darum, verschiedene Kombinationsmöglichkeiten von Farben auf einer Flagge zahlenmäßig so zu erfassen, dass keine Zweifel mehr bestehen können, ob man die eine oder andere Kombination vergessen hat. Dazu muss in einer Vielzahl von möglichen Anordnungen eine Ordnungsstruktur erzeugt werden. Systematisches Denken führt damit zu dem Erlebnis, ein vermeintliches Chaos beherrschen und überblicken zu können: ein Schatz in den Turbulenzen der Pubertät!

Schließlich befinden sich die Schülerinnen und Schüler in der 9. Klasse in einem entscheidenden Umbruch. Mit der Geburt des Astralleibes beginnen die Jugendlichen, ihre Emotionen deutlicher zu spüren, was sie mitunter stark verunsichern kann. Neue Eindrücke, sowohl aus dem eigenen Inneren als auch aus der Außenwelt, überschwemmen die Seele. Neugier und die Suche nach sich selbst und einer eigenen Position bestimmen die Haltung. Altes wird abgelegt. Die Distanz zu den Erwachsenen nimmt zu und gleichzeitig wird genau bemessen, wie diese sich verhalten. Das noch unsichere Urteil schwankt durch die Öffnung zu den Ideen des Wahren und Guten zwischen hehren Idealen und den eigenen Bedürfnissen und Begehrlichkeiten. Dadurch entsteht oft eine Diskrepanz zwischen den Ansprüchen an die Handlungen anderer und dem eigenen Verhalten.

Für den Unterrichtenden bedeutet dies, dass die Schülerinnen und Schüler nicht mehr, wie in der Unterstufe, dem Lehrer als Vorbild nacheifern, sondern ihn kritisch betrachten und nur annehmen, was ihnen aus der Sache heraus plausibel vorkommt; es sei denn, die Unterrichtsinhalte berühren etwas in den Jugendlichen, womit sie sich gern beschäftigen, auch wenn ihnen die Gründe hierfür zunächst unbewusst bleiben.

Ist beides nicht der Fall, taucht meistens die von Zweifeln und Unlust begleitete

Frage auf, wozu das denn gut sein soll, was im Unterricht zu leisten ist. Neben offenem Protest gibt es dann die passive Haltung des Nicht-Ergreifens.

Der Mathematikunterricht in inklusiven Klassen stellt dabei für den Lehrer eine besonders große Herausforderung dar, haben wir es doch hier meist mit sehr unterschiedlichen kognitiven Voraussetzungen zu tun. Jugendliche, die die Unterrichtsinhalte nicht verstehen, schalten sehr schnell ab und geben die innere wie äußere Beteiligung auf. Andererseits empfinden mathematisch gut begabte Schüler ein zu niedrig gehaltenes Niveau als langweilig und sinnlos. Somit ist eine Differenzierung nach Schwierigkeitsgrad und Temperament unabdingbar. Es muss im Verlauf des Unterrichts Phasen geben, in denen jeder Jugendliche an Aufgaben arbeiten kann, die seinem Begabungsprofil und seiner Persönlichkeit entsprechen, aber auch solche, in denen die ganze Klasse gemeinsam am Geschehen teilhaben kann.

Hier bietet eine Epoche zur Kombinatorik gute Voraussetzungen, da die Aufgabenstellungen von ganz einfachen Tätigkeiten wie dem Auffinden von Farbkombinationen bis hin zur kniffligen Arbeit an echten Forschungsfragen reichen können. Auch lassen sich unterschiedliche Temperamente ansprechen, indem man die Schülerinnen und Schüler Aufgabentypen und Lösungsmethoden selbst wählen lässt – vom akribischen Aufschreiben langer Listen bis zum genialen Überfliegen durch Auffinden und Anwenden komplexer Formeln.

PERSONELLE, ZEITLICHE UND RÄUMLICHE BEDINGUNGEN

Die Epoche zur Kombinatorik, die im Folgenden beschrieben wird, wurde von Anne Schnitzler an der Windrather Talschule in Velbert-Langenberg während der Jahre 2014 bis 2016 mehrere Male durchgeführt, angelehnt an ein Konzept von Rolf Rosbigalle aus Lübeck. Der grundsätzliche Aufbau blieb von Mal zu Mal bestehen, in einzelnen Phasen gab es jedoch Variationen.

Gerade wenn wir inklusive Klassen unterrichten, müssen wir uns von dem Gedanken lösen, es gäbe für die verschiedenen Epochen und Unterrichtsstunden bewährte Methoden oder gar fertige Rezepte. Es gilt vielmehr, einen Rahmen zu schaffen, der größtmögliche Flexibilität erlaubt, um stets die konkrete Unterrichtssituation ausgehend von den Schülerinnen und Schülern, die man vor sich hat, zu gestalten.

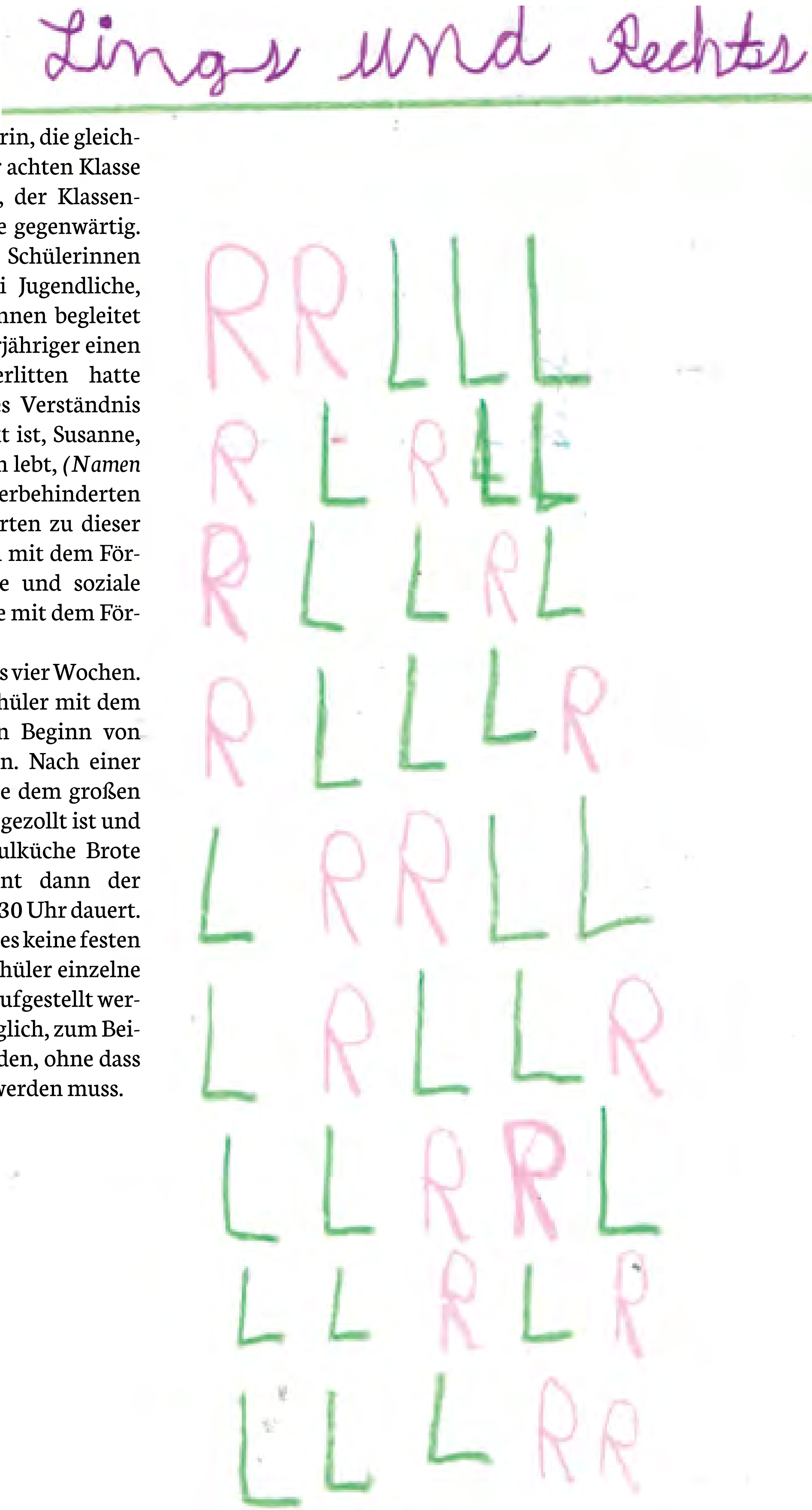
Bei der Darstellung der Epoche werden hauptsächlich aus zwei Klassen typische Beispiele geschildert, da es hier charakteristische Unterschiede in der sozialen Gestalt der Klassen gab, die jeweils zu verschiedenen Unterrichtssituationen führten.

Die eine Klasse, wir nennen sie hier „Klasse A“, bestand aus 25 Schülerinnen und Schülern, darunter waren auch Laura *(Name geändert)*, die wegen einer Tetraspastik auf den Rollstuhl angewiesen ist, sowie ein Mädchen mit Down-Syndrom, ein Mädchen mit leicht autistischen Zügen und zwei Jugendliche mit einer Lernbehinderung. Die Klasse wurde von insgesamt drei Integrationshelferinnen begleitet, sodass zusammen mit der Mathematiklehrerin und der Klassenbetreuerin stets fünf erwachsene Personen im Unterricht anwesend waren. Dieses Zahlenverhältnis war auch in den anderen Klassen ähnlich. Die Integrationshelferinnen sind zwar einzelnen Schülern zugeordnet, doch wirken sie, wenn die Situation es zulässt, als Unterstützung der ganzen Klasse. Besonders hilfreich ist dies, wenn die Jugendlichen in einzelnen Gruppen in verschiedenen Räumen arbeiten.

Bei der anderen Klasse, wir nennen sie hier „Klasse B“, gab es die Besonderheit, dass sie als eine zwei Jahrgänge umfassende Doppelklasse geführt wurde. So war neben der Mathematiklehrerin, die gleichzeitig Klassenbetreuerin der achten Klasse war, auch ihr Teamkollege, der Klassenbetreuer der neunten Klasse gegenwärtig. In dieser Klasse gab es 32 Schülerinnen und Schüler, darunter drei Jugendliche, die von Integrationshelferinnen begleitet wurden: Robert, der als Vierjähriger einen schweren Krampfanfall erlitten hatte und dessen mathematisches Verständnis dadurch stark eingeschränkt ist, Susanne, die mit dem Down-Syndrom lebt, *(Namen geändert)* und einen körperbehinderten Jungen. Des Weiteren gehörten zu dieser Doppelklasse zwei Mädchen mit dem Förderschwerpunkt emotionale und soziale Entwicklung sowie ein Junge mit dem Förderschwerpunkt Lernen.

Die Epoche umfasste jeweils vier Wochen. Jeder Tag begann für die Schüler mit dem sogenannten künstlerischen Beginn von acht Uhr bis kurz vor neun. Nach einer kurzen Frühstückspause, die dem großen Hunger der Pubertierenden gezollt ist und in der sich alle in der Schulküche Brote zubereiten können, beginnt dann der Hauptunterricht, der bis 10.30 Uhr dauert.

In den Klassenräumen gibt es keine festen Bänke, sondern für jeden Schüler einzelne Klapptische, die bei Bedarf aufgestellt werden können. Somit ist es möglich, zum Beispiel einen Stuhlkreis zu bilden, ohne dass großer Aufwand betrieben werden muss.



DIE EPOCHE

Der Aufbau der Epoche im Überblick
Die Epoche beginnt nach einer kurzen Einführung mit Aufzählungen von verschiedenen Möglichkeiten und Kombinationen aus konkreten Beispielen, die die Schülerinnen und Schüler in Gruppen bearbeiten. Dabei gestalten sie Plakate und stellen ihre Ergebnisse der Klasse vor. Sie entwickeln daran systematisches Vorgehen und finden Regelmäßigkeiten heraus. Nach einer Übphase werden die gewonnenen Einblicke in Formeln übersetzt und auf weitere Beispiele angewandt. Mit Hilfe von Arbeitsblättern, die auch eine Selbstkontrolle ermöglichen, vertiefen die Schüler das Gelernte. Je nach Fortschritt in der Klasse oder auch nur mit einzelnen Schülern können im Anschluss daran Wahrscheinlichkeiten behandelt werden. Es gibt immer wieder Phasen, besonders zu Beginn einer Unterrichtsstunde, in denen die Jugendlichen ihre Ergebnisse vorstellen. Am Ende der Epoche runden Tests, abgestuft nach dem, was die einzelnen Schülerinnen und Schüler sich erarbeitet haben, das Thema ab.

Im Folgenden werden die einzelnen Phasen der Epoche genauer beschrieben. Die Schilderung ist zu Beginn sehr ausführlich, um auch Nichtmathematikern das Nachvollziehen zu erleichtern. Im weiteren Verlauf werden die mathematischen Erläuterungen knapper, da sonst Ausführungen nötig würden, welche den Rahmen dieses Aufsatzes sprengten.

DER EINSTIEG

Zu Beginn der Unterrichtsstunden sitzen die Schülerinnen und Schüler zumeist mit der Mathematiklehrerin und den weiteren Erwachsenen im Stuhlkreis. So ist jeder für jeden sichtbar und es kann sich niemand hinter seinem Tisch verstecken. Das gegenseitige Zuhören, das in dieser Altersstufe oft sehr schwer zu erreichen ist, wird dadurch enorm erleichtert.

Jetzt gibt es als Einstieg ein einfaches Beispiel eines kombinatorischen Problems aus einer konkreten, anschaulichen Situation. Viele Jugendliche kennen aus amerikanischen Spielfilmen die eigentümlichen Straßenbezeichnungen von New York. Mit einer Erzählung über die Entstehungsgeschichte des Straßennetzes beginnt die erste Stunde. Im Folgenden finden wir einige Hintergründe zur Entstehung des Straßennetzes:

> *Der Commissioners' Plan of 1811 war ein Vorschlag der Staatsregierung von New York, der 1811 angenommen wurde, um die ordnungsgemäße Entwicklung und den Verkauf von Land auf Manhattan zwischen der 14. Straße und Washington Heights durchzuführen. Dieser Plan ist die wohl berühmteste Umsetzung eines Rasterplans und wird von vielen Historikern für die Zeit der Erstellung als äußerst*

visionär betrachtet. Einige haben allerdings seine zu monotone Anordnung im Vergleich zu unregelmäßigen Straßenmustern älterer Städte kritisiert. Der Plan wurde von einer dreiköpfigen Kommission verfasst, die sich aus Gouverneur Morris, dem Anwalt John Rutherfurd und dem Vermesser Simeon De Witt zusammensetzte.

Man sah ein gleichmäßiges Netz aus Straßen und Grundstücksgrenzen vor, ohne auf die Topographie der Insel Manhattan selbst Rücksicht zu nehmen. Geplant waren zwölf durchnummerierte Straßen (in diesem Kontext im Engl. als Avenues bezeichnet), die in Nord-Süd-Richtung (im weitesten Sinne – Manhattan ist leicht in Nordost-Südwest-Richtung geneigt), weitgehend parallel zur Küstenlinie des Hudson-Flusses verlaufen sollten, sowie 155 rechtwinklig kreuzende Straßen. Die Stellen, an denen diese kreuzenden Straßen verlaufen sollten, waren als die Grenzen von 5-Acre-Parzellen festgelegt, in die das Land vorher eingeteilt wurde.[2]

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Commissioners'_Plan_von_1811

Bildnachweis
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1847_Lower_Manhattan_map.jpg

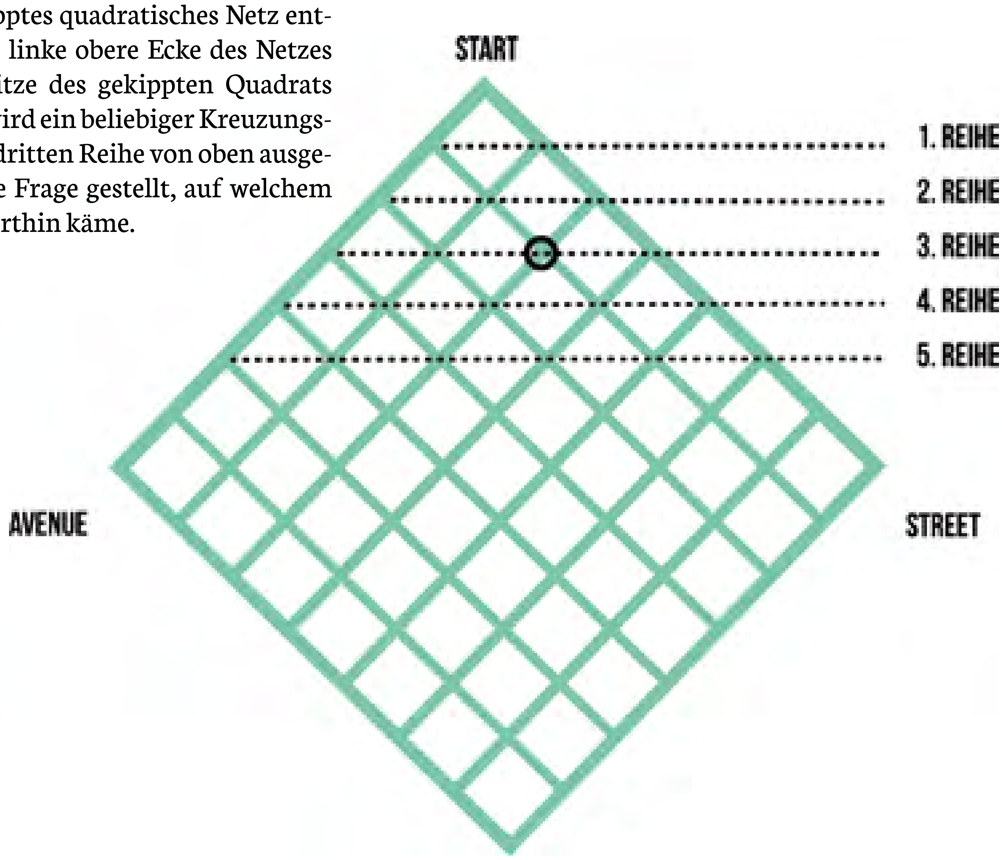
Unter den Jugendlichen entsteht nun eine neugierige Spannung, was dies wohl mit Mathematik zu tun haben könnte. Ein ähnliches Beispiel für eine barocke Planung einer Stadt ist die Quadratestadt in Mannheim. Hier sind allerdings nicht die Straßen durchnummeriert, sondern die Häuserblocks zeilenweise in Buchstaben und reihenweise in Zahlen durchgezählt:

Bis zum Jahr 1684 hatte Mannheim in der Innenstadt Straßennamen wie jede andere Stadt. Sie wurden jeweils als „Gasz" („Gasse") bezeichnet, beispielsweise „Mauritz Gasz", „Ludwigs Gasz", „Friederichs Gasz". Als dann die ungewöhnliche Nummerierung eingeführt wurde, hielten die Einwohner Mannheims trotzdem an den alten Straßennamen fest. Diese erste Nummerierung unterschied sich von der heutigen: Das heutige Quadrat P 1 war zum Beispiel das Quadrat XXXI, das heutige Quadrat E 1 war Quadrat XXXII. Ausgenommen von dieser Nummerierung war die Friedrichsburg, welche vom Schloss bis zu den Mannheimer Planken reichte. Als dieses Gebiet im 18. Jahrhundert in die Stadt einbezogen wurde, änderte sich auch die Nummerierung.
Die Einteilung in Quadrate blieb auch nach der Zerstörung durch die Franzosen im Jahr 1689 während des Pfälzischen Erbfolgekrieges und dem Wiederaufbau bestehen. Nach der Neuvermessung in den 1730er-Jahren wurden die Quadrate zum ersten Mal mit Buchstaben bezeichnet. Im Jahr 1798 wurde die Stadt neu eingeteilt und die Wohnblocks mit Buchstaben (zunächst von A bis Z; heute von A bis U) und Ziffern bezeichnet. Die heutige Systematik der Quadrate mit Buchstaben und Ziffern wurde im Jahr 1811 eingeführt. Die vorherige Einteilung passte nicht mehr für eine Innenstadt, die sich nach Westen und nach Osten ausdehnte und deshalb eine nach beiden Seiten skalierbare Nummerierung erforderte.[3]

https://de.wikipedia.org/wiki/[3] Quadratestadt

Bildnachweis
https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratestadt#/media/File:Grundrissbuechlein_Mannheim_1796.jpg
https://de.wikipedia.org/wiki/Mannheim#/media/File:Stadtplan_Mannheim_1880.jpg

Jetzt wird das Straßennetz diagonal gekippt an die Tafel und auf den Fußboden in der Mitte des Stuhlkreises gezeichnet, so dass ein gekipptes quadratisches Netz entsteht und die linke obere Ecke des Netzes die obere Spitze des gekippten Quadrats darstellt. Es wird ein beliebiger Kreuzungspunkt in der dritten Reihe von oben ausgewählt und die Frage gestellt, auf welchem Wege man dorthin käme.



Die Schülerinnen und Schüler zeigen, mit dem Finger die Linien entlangfahrend, mögliche Wege an der Tafel auf beziehungsweise laufen sie auf dem Boden ab. Dabei kann jeder in der Klasse folgen und seiner Vorstellungskraft freien Lauf lassen, wie die konkrete Situation eines Taxifahrers in New York wohl aussehen würde.

Nun folgt die Aufgabe, möglichst alle Wege, die zum Ziel führen - ohne dass man eine Strecke zurückfährt - in irgendeiner Weise zu notieren. Damit knüpft man an die sehr elementare Tätigkeit des Sich-Orientierens an. Orientierung ist eine der grundlegendsten Fähigkeiten von sich autonom bewegenden Lebewesen. Jeder Jugendliche kann hier auf eigene Erfahrungen zurückgreifen, die ihn zu der Fähigkeit geführt haben, sich in einer neuen Umgebung zurechtzufinden. Es setzt daraufhin eine geschäftige Eigentätigkeit ein, in der sehr individuell gearbeitet werden kann. So zeichnen manche Kästchen, manche Striche, manche Buchstaben.

Der nächste Schritt ist die Einführung einer abstrakten Symbolik zur Beschreibung des eingeschlagenen Weges. Zur Vereinheitlichung sagen wir: Für das Rechtsabbiegen schreiben wir *R* und für das Linksabbiegen *L*. Jetzt können wir die Wege eindeutig notieren.

Um zu dem in der Zeichnung markierten Punkt zu gelangen, können wir von der oberen linken Ecke (die Spitze des schräg gestellten Netzes) zuerst rechts, dann links und nochmal links fahren (das Wort „fahren“ in diesem Zusammenhang verbindet unsere mathematische Überlegung wieder mit der konkreten Situation und erleichtert so den Zugang zur abstrakten mathematischen Ebene). Wir notieren also *R* für rechts abbiegen, *L* für links abbiegen, und noch einmal *L*, also zusammen *RLL*. Es werden alle möglichen Wege noch einmal wiederholt, um sie notieren zu können. Wir erhalten *RLL, LRL, LLR.*

Der gleiche Vorgang findet noch einmal statt mit einer Kreuzung in der vierten Reihe. Wenn alle Möglichkeiten notiert sind, lässt man ruhig noch weiter suchen. Nun tauchen aber stets nur noch welche auf, die schon notiert sind – es sei denn, die Regel wird missachtet, nur vorwärts, also von oben nach unten, zu fahren. Wir erhalten nun *LLRR, LRRL, LRLR, RLRL, RLLR, RRLL.* Findige Schüler bemerken dabei zweierlei: Erstens kommen *L* und *R* jeweils zweimal vor und zweitens gibt es zu jeder Kombination von *L* und *R* eine spiegelbildliche, in der *L* und *R* vertauscht sind.

Es folgt die recht frei gehaltene Aufgabe, weitere Kombinationen zu anderen Punkten zu finden. Jetzt notieren die Schülerinnen und Schüler beliebige Kombinationen. Dabei findet eine leichte Steuerung durch die Lehrerin statt. Es differenziert sich das Feld nach Fähigkeiten und Temperament. Einige ziehen wahllos Punkte heraus, einige gehen systematisch vor, einige verfallen in den Anspruch, möglichst viel zu schaffen, und einige versuchen schon, Gesetzmäßigkeiten dafür zu entdecken, in welcher Art und Weise die Anzahl der möglichen Wege ansteigt, wenn ich Punkte in den höheren Reihen wähle.

Die Ergebnisse der einzelnen Schülerinnen und Schüler werden jetzt in das diagonal an der Tafel stehende Kreuzungssystem eingetragen. Zu jedem Kreuzungspunkt erhalten wir nun die Zahl der möglichen Wege, wie man von der ganz oben stehenden Ecke dorthin kommt. Die so zusammengetragene Auswertung ergibt ein mathematisches Gebilde – das Pascalsche Dreieck. Es ist so aufgebaut:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Kann der werte Leser uns sagen, wie die nächste Zeile aussehen muss? Und was hat dieses Dreieck mit dem Straßennetz zu tun?

Lösen wir zunächst die erste Frage auf, was auch einigen Schülern spontan gelingt: Für jede folgende Zeile werden jeweils zwei benachbarte Zahlen der vorhergehenden Zeile zusammengezählt. Das heißt, jede Zahl, die man sieht, ist die Summe der beiden links und rechts darüber stehenden Zahlen.

DOKUMENTIERTE GRUPPENARBEIT

Aber was hat nun das Pascalsche Dreieck mit dem Straßennetz zu tun? Diese Frage lassen wir erst einmal offen und bieten jetzt einen Pool von Aufgaben an, aus denen die Schülerinnen und Schüler in Gruppen eine für sich aussuchen. Die Gruppen sind so zusammengestellt, dass drei bis vier Jugendliche mit vergleichbaren mathematischen Fähigkeiten zusammenarbeiten. Jede Gruppe soll eine Fragestellung bearbeiten und ihre Ergebnisse und Arbeitsweise auf einem Plakat festhalten, anhand dessen sie anschließend ihre Arbeit der Klasse vorstellen kann.

Wir gehen nun also in eine Phase über, in der individuell am Thema gearbeitet wird. Die Schülerinnen und Schüler beschäftigen sich nun nicht mehr alle mit demselben Inhalt, aber die Arbeitsphasen sind synchron, das heißt wir erwarten gleichzeitig die Ergebnisse der Gruppenarbeiten, die sehr verschieden ausfallen können und doch alle mit dem übergeordneten Thema verknüpft sind. Die meisten der verschiedenen Ergebnisse werden wir auch in unser Pascalsches Dreieck einordnen können.

Doch jetzt zu den einzelnen Arbeitsaufträgen:

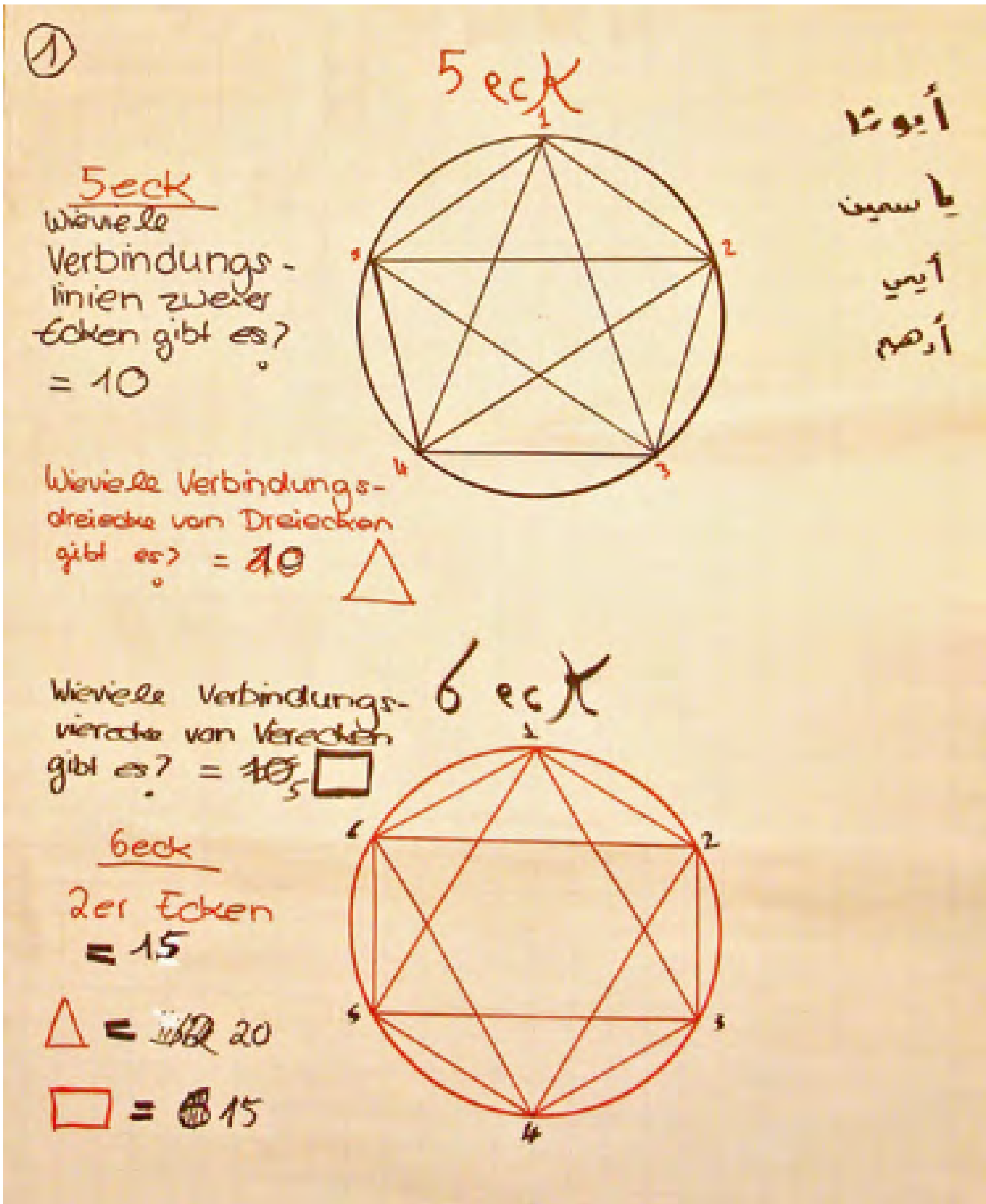
Jede Gruppe wählt eine aus den acht Aufgaben und erhält von der Lehrerin Anweisungen zur Notierung ihrer Arbeitsschritte und Ergebnisse. Einige Gruppenmitglieder üben dann hauptsächlich das Aufschreiben, andere das Auffinden von Systematiken.

Die Gruppen sollen möglichst selbstständig arbeiten und verteilen sich teilweise auf verschiedene Räume. Diese Phase ist durch kräftige Aktivität geprägt und in den meisten Gruppen ein sogenannter Selbstläufer.

Im Folgenden sind die Aufgaben und die entstandenen Plakate aufgelistet. Bei den Plakaten wurde nicht auf Perfektion hingearbeitet, schließlich sollten sie weder ausgestellt noch veröffentlicht werden, sondern lediglich den Vortrag der Gruppen vor der Klasse unterstützen. So wurde auch nicht korrigierend eingegriffen, sondern die Plakate wurden so belassen, wie sie die Schüler für richtig und nötig befunden haben.

AUFGABE 1: VERBINDUNGSLINIEN

Wie viele Verbindungslinien kann man zwischen die Ecken eines Fünfecks zeichnen? Was kommt in einem Sechseck hinzu?



AUFGABE 2: BLINDENSCHRIFT

In Blindenschrift besteht ein Buchstabe aus sechs Punkten, die in zwei Spalten zu je drei Punkten angeordnet sind. Jeder der Punkte kann entweder erhöht sein, so dass man ihn ertasten kann, oder er bleibt flach.

Wie viele verschiedene Buchstaben kann man darstellen?

② Aufgabe 2 Blindenschrift

A

Mit der Aufgabe A kann man 6 verschiedene Blindenzeichen bilden.

B

Bei B gibt es 15 verschiedene möglichkeiten.

C

Bei der Aufglabe C gibt es 20 verschiedene möglichkeiten.

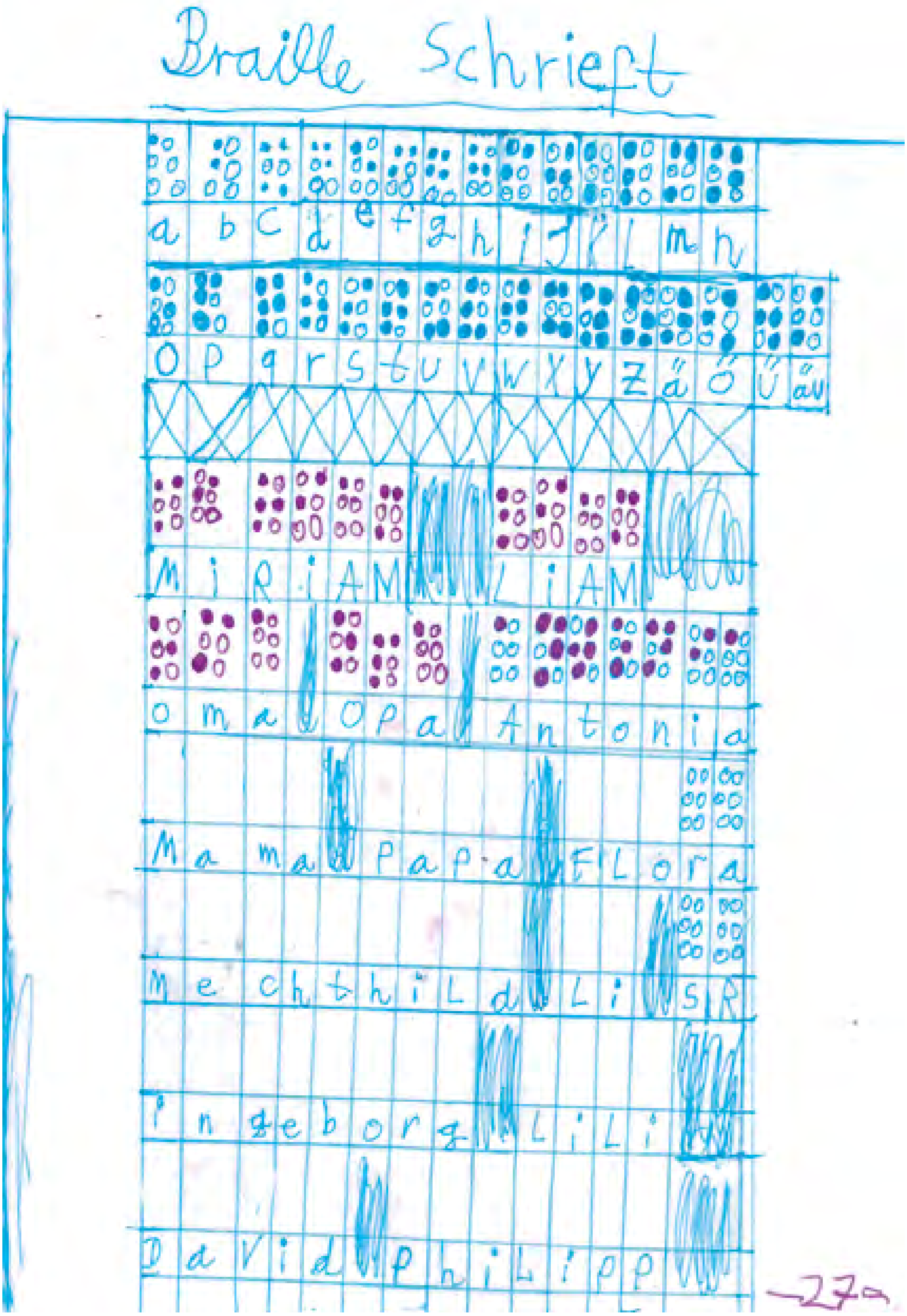
D

Und bei D gibt es 15 verschiedene möglich-keiten.

Der Weg

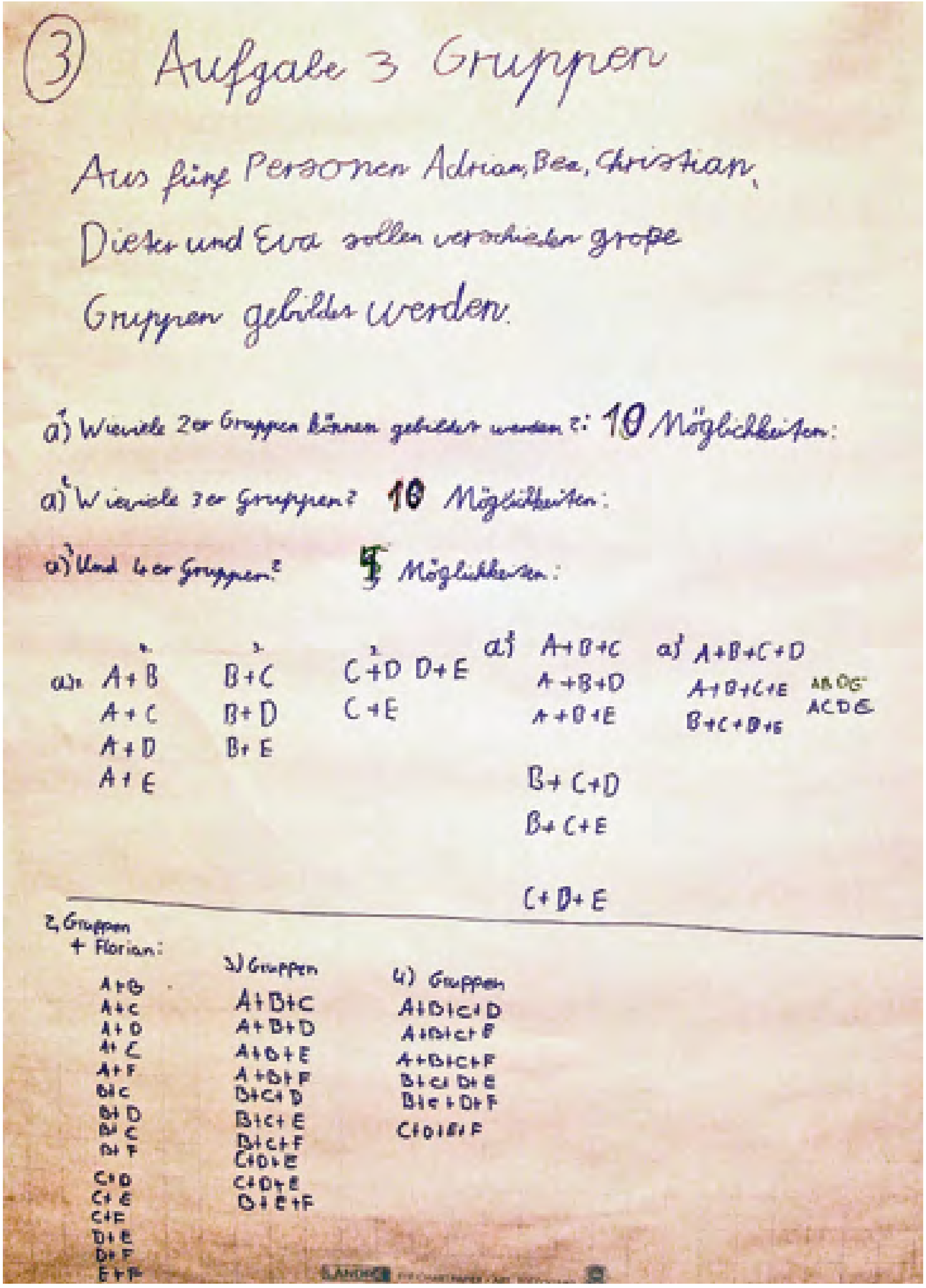
Wir haben die verschiedenen Kombienationen Aufgemalte, indem wir die Punkte rei um in verschiedene Positionen angeortnet haben.

Insgesamt gibt es 62 möglichkeiten.


Braille Schrieft
a b c d e f g h i j k l m n
o p q r s t u v w x y z ä ö ü äu
MiRiAM LiAM
oma opa Antonia
Mama Papa FLora
Ingeborg LiLi
David philipp

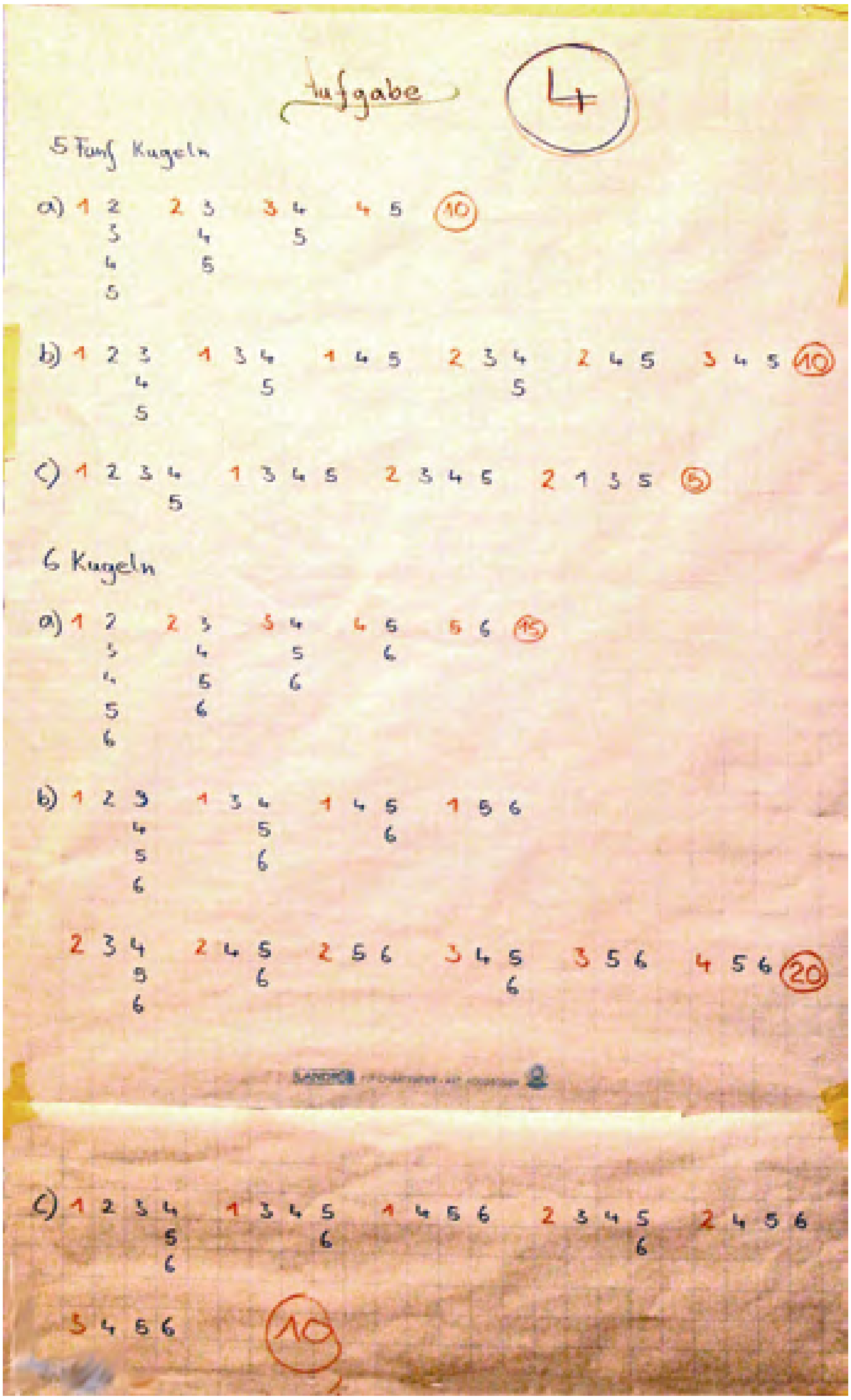
AUFGABE 3: GRUPPEN AUS FÜNF PERSONEN BILDEN

Wie viele Gruppen zu zwei, drei und vier Personen kann man aus fünf Personen (**A**drian, **B**ea, **C**hristian, **D**ieter und **E**va) bilden? Was geschieht, wenn eine sechste Person hinzukommt?



AUFGABE 4: KUGELN ZIEHEN

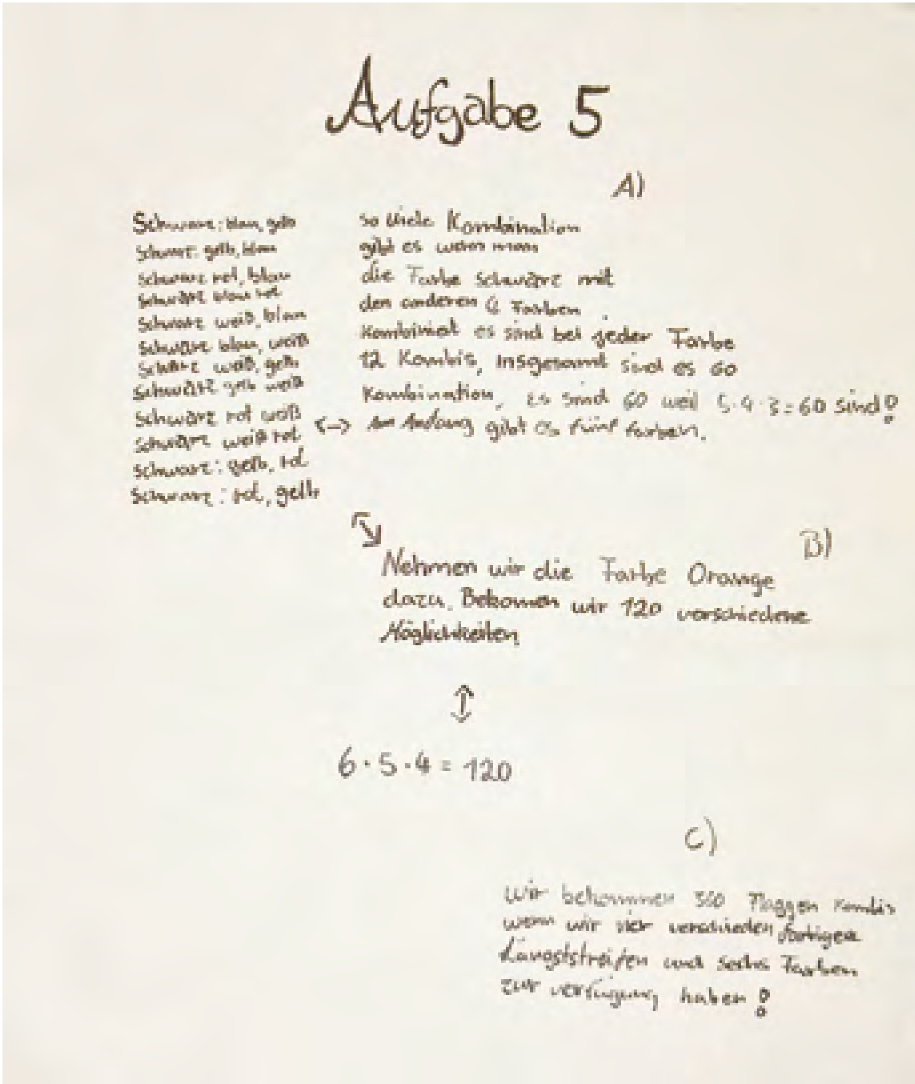
Auf wie viele Arten kann man mehrere Kugeln aus fünf Kugeln ziehen? Wie viele gibt es mit sechs Kugeln?



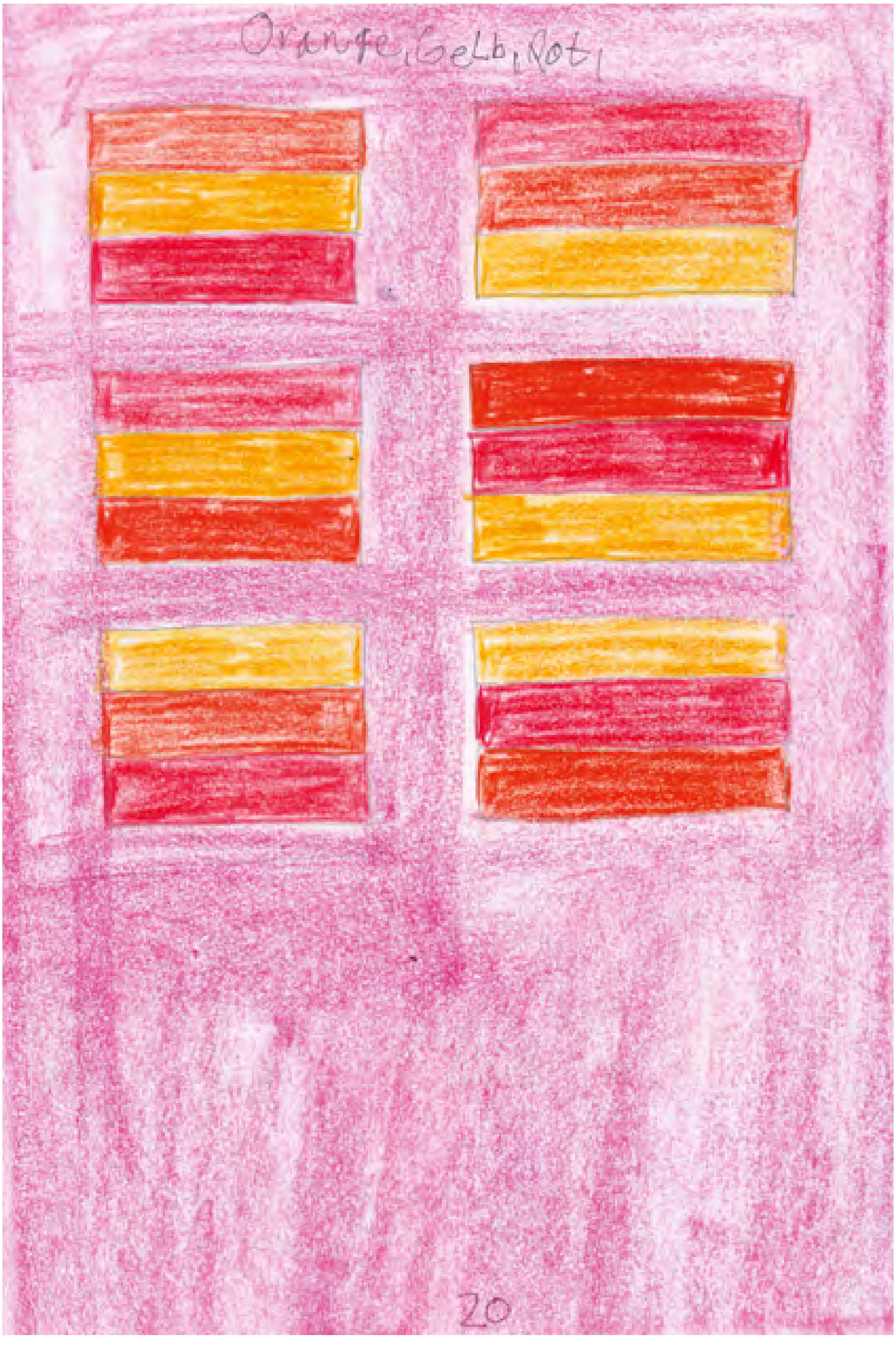
AUFGABE 5: FLAGGENFARBEN

Aus fünf Farben (Schwarz, Weiß, Gelb, Rot und Blau) sollen Schwarz und zwei weitere Farben für eine Flagge ausgewählt werden. Welche Flaggen kann man damit herstellen? Wie viele gibt es?

Wie viele mehr werden es, wenn die Farbe Orange dazukommt?

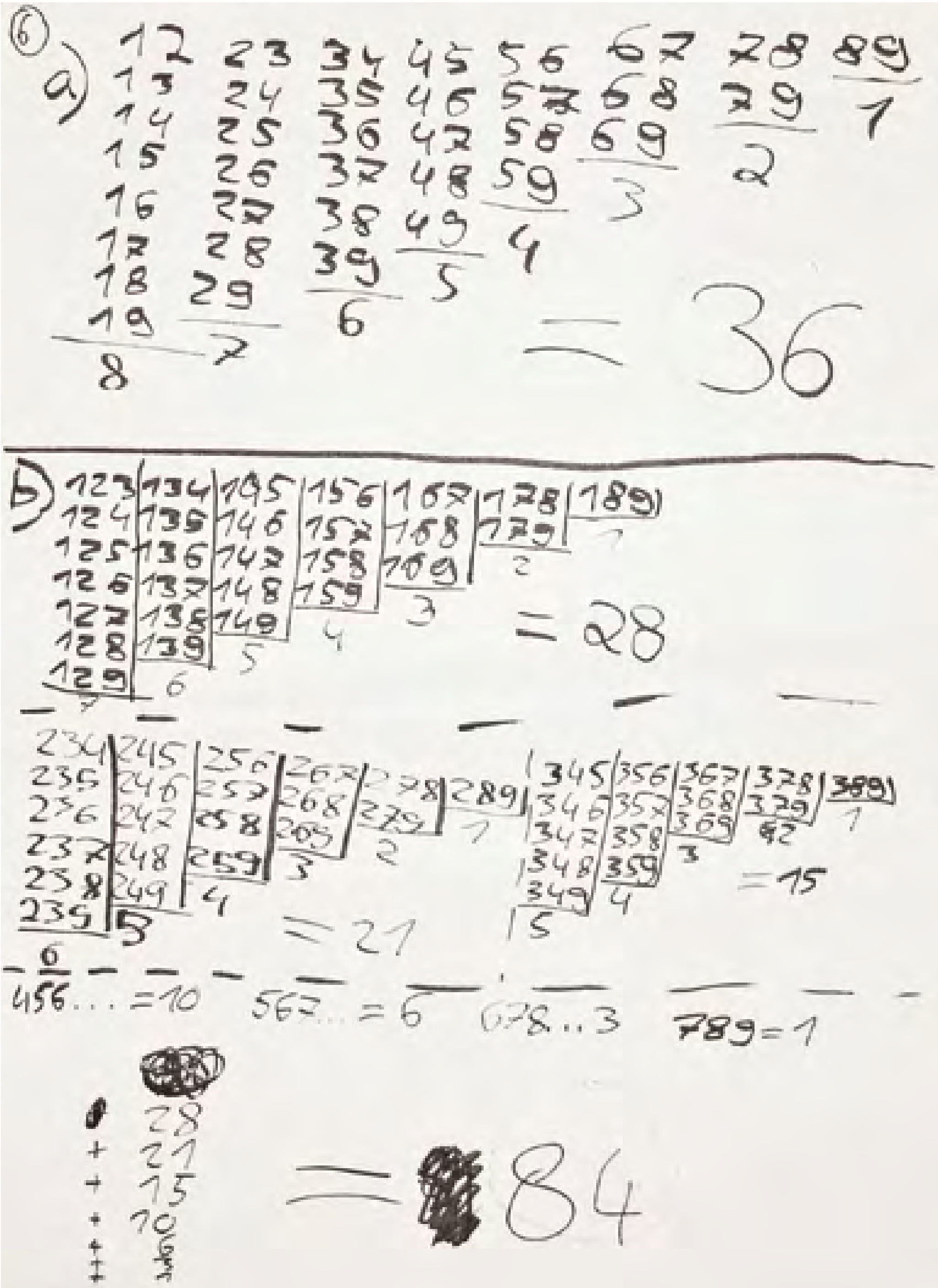


In den meisten Klassen gibt es einige Jugendliche, denen es schwerfällt, mathematische Überlegungen auf rein abstraktem Wege durchzuführen, die aber anhand von anschaulichen Beispielen und sinnvollen Arbeitsschritten die Inhalte gut begreifen können. Bei dieser Aufgabe beispielsweise zeichneten einige Schüler erst einmal die verschiedenen Flaggen in Farbe – als oberste Farbe zunächst nur Schwarz, dann nur Blau usw. – und konnten schließlich daran die Systematik sehr schön erleben.


Orange, Gelb, Rot,
20

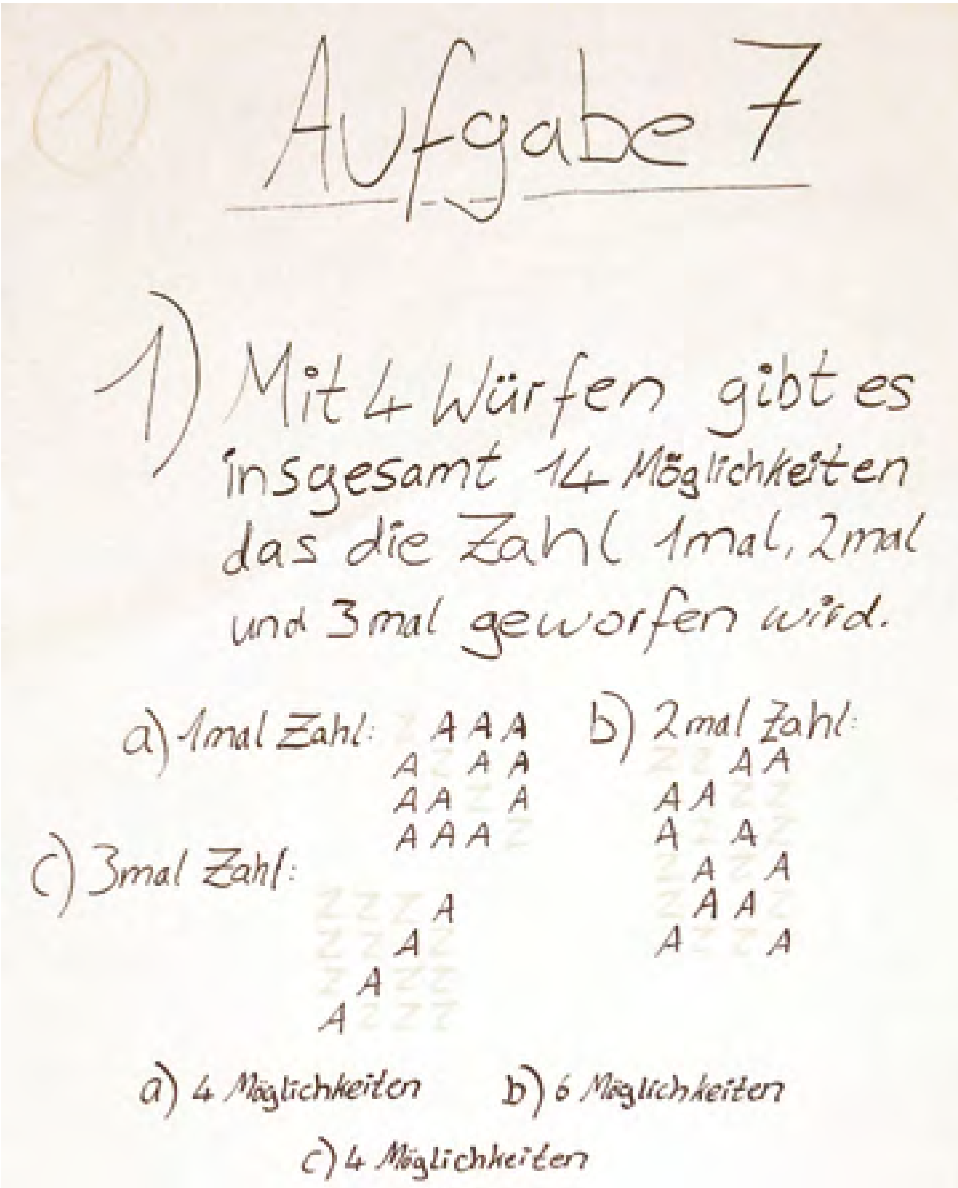
AUFGABE 6: MINI-LOTTO

Aus zehn Kugeln werden zwei bzw. drei Kugeln gezogen. Wie viele Kombinationen erhalten wir?



AUFGABE 7: MÜNZE WERFEN

Eine Münze mit Adler und Zahl wird viermal geworfen. Wie viele Möglichkeiten erhält man, dass Zahl einmal, zweimal oder dreimal auftritt?


1

Aufgabe 7

1) Mit 4 Würfen gibt es insgesamt 14 Möglichkeiten das die Zahl 1mal, 2mal und 3mal geworfen wird.

a) 1mal Zahl: Z A A A
A Z A A
A A Z A
A A A Z

b) 2mal Zahl: Z Z A A
A A Z Z
A Z A Z
Z A Z A
Z A A Z
A Z Z A

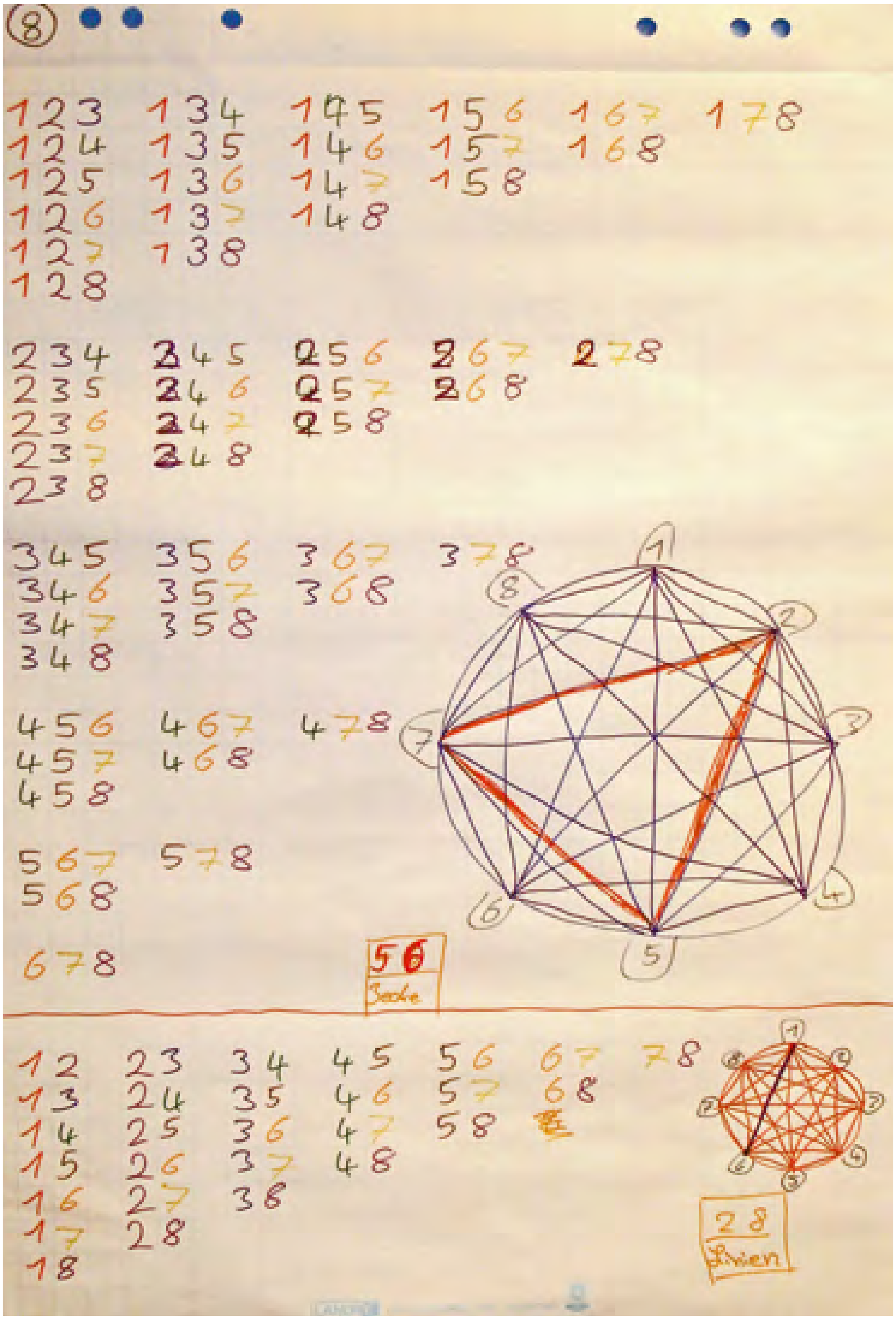
c) 3mal Zahl: Z Z Z A
Z Z A Z
Z A Z Z
A Z Z Z

a) 4 Möglichkeiten b) 6 Möglichkeiten
c) 4 Möglichkeiten

AUFGABE 8: DREIECKE IN ACHTECK

Wie viele Dreiecke kann man in ein Achteck legen?

Wie viel Zweiecke (Verbindungslinien) gibt es?



ERSTE AUSWERTUNG UND VORSTELLUNG DER ERGEBNISSE

Vielleicht wird es dem Leser schon aufgefallen sein: Bei allen diesen Aufgaben, außer der mit den Flaggenfarben, geht es darum, aus einer Menge von Elementen einige herauszusuchen. Somit haben wir es mit jeweils dem gleichen Grundtypus von Aufgaben zu tun, was den Schülern bis dahin aber nicht explizit mitgeteilt wurde.

Bei der Vorstellung der Arbeitsergebnisse unterscheiden sich die Klassen oft stark voneinander. Während in Klasse A die Jugendlichen sich gerne mitteilten und es ihnen ein Anliegen war, ihren Mitschülerinnen und Mitschülern zu einem Verständnis zu verhelfen, so gab es in Klasse B eine umfassende Scheu, sich zu zeigen, wodurch das gegenseitige Beibringen nicht recht funktionierte. Wie die Lehrerin darauf reagierte, wird weiter unten noch erläutert werden.

Gemeinsam werden die jeweiligen Werte für die Anzahl der Möglichkeiten im Pascalschen Dreieck gesucht. Viele der Schülerinnen und Schüler erkennen nun, nach welcher Regel man die entsprechenden Zahlen im Dreieck finden kann, ohne jedoch zu verstehen, warum dieses so ist.

Wähle ich zum Beispiel aus acht Personen drei aus, so schaue ich in der achten Reihe auf den dritten Platz von links, wobei die ganz linke Zahl Eins den nullten Platz darstellt. Ich finde also 56 als Anzahl der Möglichkeiten. Diese Zahl ist auch die Anzahl der möglichen Dreiecke, die man in ein Achteck legen kann, da wir ja dafür drei von den acht Eckpunkten des Achtecks aussuchen können. An dem Beispiel mit den Flaggenfarben wird dann deutlich, dass zu erkennen gilt, in welchem Fall das Pascalsche Dreieck die gefragten Lösungen anzeigt und in welchem Fall man nach anderen Wegen suchen muss.

Auch wird schnell klar, warum die Zahlen im Pascalschen Dreieck symmetrisch zur vertikalen Mittelachse liegen müssen: Es gibt stets genauso viele Möglichkeiten, eine bestimmte Anzahl von Elementen aus einer Menge auszuwählen wie diese übrigzulassen.

NÄCHSTE PHASE: AUSWEITEN UND ÜBEN

Hatten wir es bis jetzt leicht, da der Anfang getragen wurde von der Neugier auf das Neuland, die abwechslungsreiche Tätigkeit der Plakaterstellung und die Spannung des Vortrags vor der Klasse, so folgt jetzt eine Phase, wo durch Arbeit und Üben die eigenen Kenntnis- und Fähigkeitsgrenzen hinausgeschoben werden sollen. Dies ist einigen Schülerinnen und Schülern ein selbstverständliches und tiefes inneres Anliegen – um diese wird man sich hier nicht so stark zu kümmern brauchen. Dann gibt es diejenigen, die immer wieder kleine Anstöße von außen benötigen. Und schließlich haben wir meist auch junge Menschen in unseren Klassen, die nur ungern an ihre Grenzen gehen. Es ist sehr wichtig, die Schülerinnen und Schüler gut einschätzen zu können, um nicht Verweigerungsphänomene, die aus einer echten Überforderung stammen, hervorzurufen.

Zu Beginn jeder Stunde wird in der ganzen Klasse eine Frage gemeinsam behandelt. Es werden Ergebnisse wiederholt, Inhalte vertieft, Überblicke gegeben oder zum Beispiel stets von Neuem die Frage bohrend aufgeworfen, was denn nun das Wegenetz mit den Auswahlmöglichkeiten zu tun habe.

Zu solcherart Fragen, die wir in Kürze beantworten werden, gibt es oft wenige Meldungen in der Klasse. Stellt man allerdings die Frage, wer es verstanden habe, ohne es mit eigenen Worten erklären zu können, so wird man sehr viel mehr Meldungen erhalten. Etwas, was man verstanden hat, in Sprache zu fassen, sodass es auch anderen einleuchtet, ist eine Kunst für sich.

Doch nun eine mögliche Erklärung: Gehe ich eine Reihe weiter in meinen Kreuzungen, so kann ich entweder von links oben oder rechts oben kommen, also ist die Anzahl der möglichen Wege die Summe aus den Möglichkeiten der beiden oberen Kreuzungen.

Oder die Frage: Wie kommt es, dass die Auswahl von Elementen die gleichen Ergebnisse für die Möglichkeiten ergibt wie das Abbiegen im Wegenetz?

Dazu denken wir uns jede Reihe als einen Farbstift. Will ich nun in der fünften Reihe auf den dritten Platz von links, so muss ich insgesamt dreimal rechts abbiegen, sonst immer links. Ich wähle also aus den fünf Reihen drei aus, in denen ich rechts abbiege, als würde ich von fünf Farbstiften drei aussuchen. *Farbstift ausgesucht* heißt also *rechts abbiegen*. Oder, ohne um die Ecke zu denken: Gehe fünf Reihen weit und suche aus den fünf Kreuzungen drei aus, an denen du rechts gehst. Wie viele Möglichkeiten hast du? Oder gib den Reihen Namen, von denen du drei auswählst, um rechts zu gehen. Oder stelle in jede Reihe einen Schüler; wähle drei aus, die sagen sollen: „Biege rechts ab!“, wenn du an ihnen vorbeikommst. Dann ist man an einem konkreten Beispiel der vorigen Gruppenaufgaben angelangt.

Es wird immer Schülerinnen und Schüler geben, die schnell sind und sich über die Banalität dieser Beispiele beschweren: „Das ist doch klar!“ Andere wiederum kommen durch diese Beispiele erst zu einem Verständnis. Nicht selten schimpfen einige Jugendliche, wenn ihnen nach langen Schwierigkeiten endlich ein Licht aufgegangen ist, dass es doch so einfach sei und warum man es nicht gleich gesagt hätte. Es gebe eben Berge ohne Fahrstuhl, wäre eine bildhafte Antwort.

In der nächsten Phase werden dann mehrere Arbeitsbereiche, gestützt durch Arbeits- und Selbstüberprüfungsblätter, angeboten:

I. LISTEN ERSTELLEN

In dieser Gruppe wird fortgeführt, was in den ersten Aufgaben mit den Plakaten begonnen wurde: das systematische Gliedern von Möglichkeiten und deren korrektes Notieren. Wir bringen wiederholt Ordnung ins Chaos! Die Fleißarbeit wird von Schülern gewählt, welche lieber tätig sind, als mit intellektueller Schärfe Prinzipien zu durchdringen und sich dadurch Arbeit zu ersparen. Es reizt auch Schüler, die den Drang zur Vollständigkeit verspüren. Ebenso gibt es ästhetische Anreize, gut geordnete Listen zu gestalten.

Diese Aufgabe war in Klasse A für Laura verknüpft mit dem Auftrag, die Systematik der Listen den Schülern der sechsten Klasse vorzustellen. Laura nahm diese Aufgabe ungeheuer ernst und fieberte aufgeregt daraufhin. Dazu hat sie diese Systematiken immer wieder durchgearbeitet und extra ein Referat dazu geschrieben, das sie dann sehr erfolgreich in der sechsten Klasse vortrug.

In Klasse B wählten vier Schüler dieses Thema und konnten sich sehr stark damit identifizieren.

II. DAS PASCALSCHE DREIECK ÜBER ALLE GRENZEN FÜHREN

Für viele ist es eine Herausforderung, das Pascalsche Dreieck weiterzurechnen bis zu fünf- und sechsstelligen Zahlen. Hier suchen die Jugendlichen ihre eigenen Leistungsgrenzen und entwickeln den Ehrgeiz, schwere Ziele zu erreichen. Dabei prüfen sie auch ihre Konzentrationsfähigkeit und Ausdauer, wird doch an die Zuverlässigkeit der Rechenergebnisse hohe Anforderungen gestellt – verrechne ich mich einmal in einer oberen Zeile, sind alle Ergebnisse unterhalb falsch!

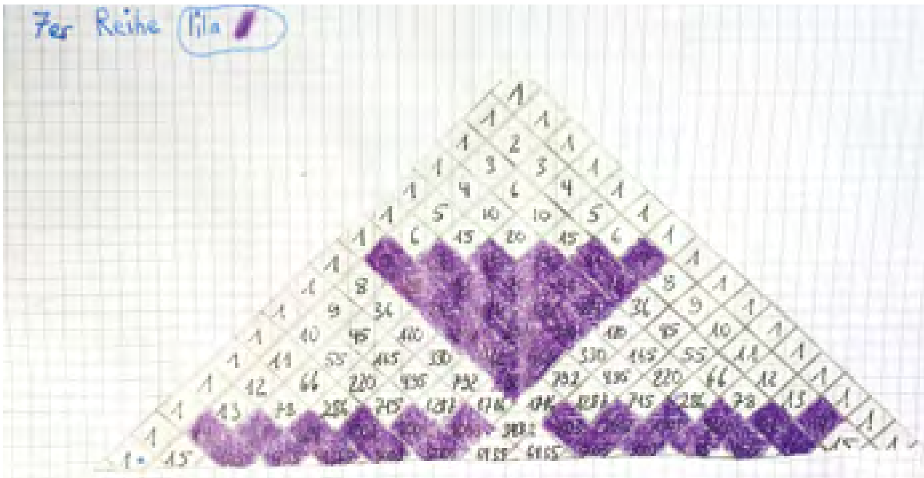
Aus Klasse A hatte sich Mareike für dieses Thema entschieden und zunächst sehr lustlos daran gearbeitet. Als sie dann aber, ähnlich wie Laura, den Auftrag bekam, es den Schülern aus der sechsten Klasse zu erklären, erwachte großes Engagement in ihr und sie verband sich stark mit ihrer Aufgabe.

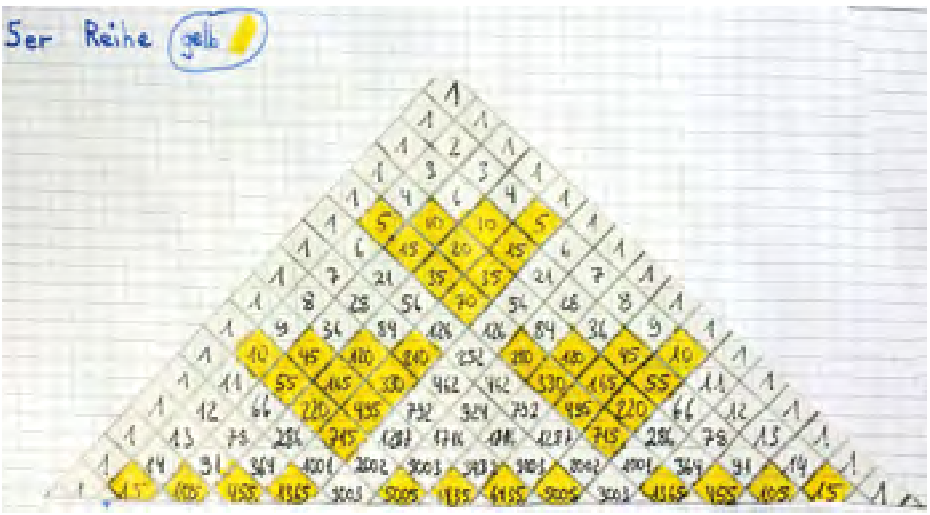
Eine Gruppe von Schülern wollte das Pascalsche Dreieck bis zur 49. Reihe berechnen. Sie hielten sich leider nicht an den Ratschlag, sich von Anfang an gegenseitig auf Rechenfehler hin zu korrigieren, und verrechneten sich nach und nach heillos – in der 49. Reihe muss man in der Mitte die Zahl 63 205 303 218 876 erhalten! So litt die anfänglich große innere Verbundenheit zu diesem Thema sehr stark und die Schüler wechselten zur Gruppe mit den Listen, die sie dann gut beherrschten.

III. FORSCHUNGSFRAGEN

a. Teilbarkeiten am Pascalschen Dreieck

Färbt man im Pascalschen Dreieck Zahlen ein, die durch eine bestimmte natürliche Zahl (zum Beispiel Zwei, Drei oder Sieben) teilbar sind, erhält man ein spezifisches Muster, das umso deutlicher wird, je größer mein Dreieck ist. Dazu erhalten die Schülerinnen und Schüler vorgefertigte Blätter mit Pascalschen Dreiecken und färben die entsprechenden Zahlen ein. So haben aus Klasse B Susanne und Robert für das Ausmalen die entsprechenden Reihen geübt. Sie erhielten dazu Listen, auf denen die Vielfachen der entsprechenden Zahl aufgelistet waren.





Anspruchsvoller wird es, wenn man die Dreiecke erweitert, ohne die Zahlen selbst zu nutzen, sondern nur die Teilbarkeiten. Hat man zum Beispiel zwei Zahlen, die bei der Teilung durch sieben die Reste zwei und drei ergeben, so ergibt die Summe dieser Zahlen bei der Teilung durch sieben den Rest fünf (zum Beispiel 16 und 24 ergeben die Reste zwei und drei, für die Summe 40 erhalten wir den Rest fünf). Liegen die Reste bei drei und vier, so ist die Summe durch sieben teilbar. Bei den Resten fünf und vier dagegen erhält man für die Summe den Rest von neun, also zwei. Mit dieser Methode erstellt man ein Pascalsches Restklassendreieck, deren Zahlenwerte zwischen null und dem Teiler liegen und somit überschaubar bleiben.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 3 3 5 1
1 6 1 6 1 6 1
1 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 1 1
1 2 1 0 0 0 0 1 2 1
1 3 3 1 0 0 0 1 3 3 1
1 4 6 4 1 0 0 1 4 6 4 1
1 5 3 3 5 1 0 1 5 3 3 5 1
1 6 1 6 1 6 1 1 6 1 6 1 6 1
1 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 2 2 0 0 0 0 0 1 1
1 2 1 0 0 0 0 2 4 2 0 0 0 0 1 2 1
1 3 3 1 0 0 0 2 6 6 2 0 0 0 1 3 3 1
1 4 6 4 1 0 0 2 1 5 1 2 0 0 1 4 6 4 1
1 5 3 3 5 1 0 2 3 6 6 3 2 0 1 5 3 3 5 1
1 6 1 6 1 6 1 2 5 2 5 2 5 2 1 6 1 6 1 6 1
1 0 0 0 0 0 0 3 0 0 0 0 0 0 3 0 0 0 0 0 0 1

Restklassen zur Sieben im Pascalschen Dreieck. Durch sieben teilbare Zahlen ergeben null.

b. Binomische Formeln am Pascalschen Dreieck

Berechnen wir höhere binomische Formeln, wie zum Beispiel $(a+b)^7$, so geben die Zahlen der siebenten Reihe im Pascalschen Dreieck die Koeffizienten des Ausdrucks, wobei die Potenzen von a von sieben heruntergezählt und die von b von null bis sieben hochgezählt werden. Die Zahlen der siebenten Reihe sind 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7 und 1. Damit ist

$$(a+b)^7 = a^7 + 7\,a^6b + 21\,a^5b^2 + 35\,a^4b^3 + 35\,a^3b^4 + 21\,a^2b^5 + 7\,ab^6 + b^7.$$

Dieses System durch Ausmultiplizieren für kleinere Werte der Exponenten zu zeigen, stellt einen hohen Rechenaufwand dar, der nicht kompliziert, aber umfangreich ist und hohe Anforderungen an Konzentration und sorgfältiges Aufschreiben erfordert. Vielleicht erkennt man, dass sich das Ausmultiplizieren einer Kette von Binomen zurückführen lässt auf die Frage, wie viele Kombinationen es gibt, wenn ich aus sieben Klammern drei auswähle, von denen ich a nehme; dann bleiben noch vier Klammern, die b liefern:

$$(a+b)^7 = (a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b)$$

Drei mathematisch begabtere Schülerinnen der Klasse B nahmen sich der Restklassen und dieser Thematik an, wobei zwei Mädchen federführend wirkten und eines so mitschwamm. Hierbei schauten sie schon in die Anfänge der Zahlentheorie. Die Verwendung von Restklassen hoher Primzahlen ist übrigens in den gängigen Verschlüsselungsmethoden der Informationstechnik üblich.

c. Formeln finden

Eine besondere Herausforderung für kognitiv sehr begabte Schülerinnen und Schüler ist es, an der Entwicklung einer Formel mitzuarbeiten. In diesem Fall sollte eine Formel gefunden werden, mit der man die Zahl an einer beliebigen Stelle des Pascalschen Dreiecks direkt ermitteln kann. Dies geschieht, indem man an sogenannten Urnenmodellen überlegt, wieviele Kombinationsmöglichkeiten existieren, wenn man verschiedene farbige Kugeln aus einer Urne zieht, in der von jeder Farbe je eine Kugel liegt. Dann untersucht man, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn mehrere Kugeln gleiche Farben haben. Weiterhin wird betrachtet, was sich ändert, wenn jede Kugel gleich nach der Ziehung wieder in die Urne zurückgeworfen wird. Über mehrere Schritte – deren Ausbreitung den Rahmen hier sprengen würde und die in den Mathematikbüchern für die Oberstufe im Allgemeinen recht gleichartig beschrieben sind – gelangt man schließlich zur Formel für die sogenannten Binomialkoeffizienten, sprich „n über k“:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

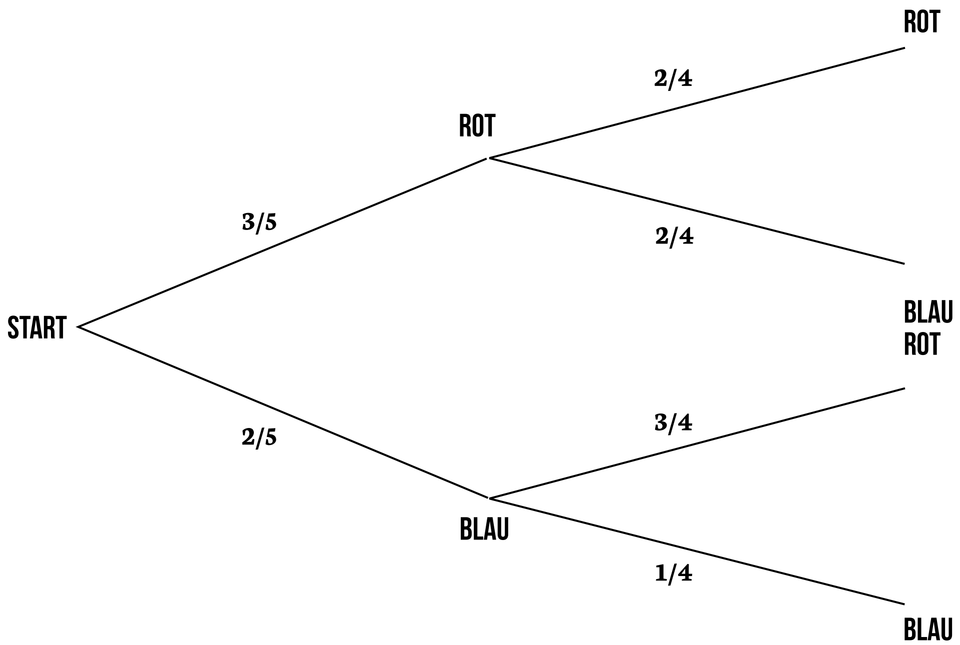
wobei n die Anzahl der Elemente ist, aus denen man k Elemente aussucht. n! bedeutet, dass man die Zahlen von eins bis n miteinander multipliziert. Wir verdeutlichen das an dem Beispiel, drei Personen aus einer Gruppe von fünf Personen auszuwählen. Also ist $n = 5$ und $k = 3$. Die Anzahl der möglichen Kombinationen ist dann

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot(1\cdot2)} = \frac{4\cdot5}{2} = 10.$$

In Klasse B arbeiteten insgesamt sieben Jugendliche intensiv in dieser Gruppe, auch ein in der Mathematik eigentlich weniger begabtes Mädchen war dabei.

Die Arbeit erfüllte die Schülerinnen und Schüler mit einigem Stolz, besonders die, die zur Entwicklung der Formel einiges beitrugen, aber auch jene, die diesen Weg nur staunend mitvollziehen konnten. Das Erlebnis, dass es die eigene Mathematik ist, kann sehr bedeutsam werden und tief gehen.

In dieser Gruppe wurden auch die sogenannten Baumdiagramme eingeführt. Mögliche Ergebnisse von Zufallsexperimenten wie dem Ziehen von Karten oder Kugeln werden als Äste in einer Grafik dargestellt.



Baumdiagramm einer Ziehung von zwei Kugeln aus einer Urne mit drei roten und zwei blauen Kugeln

ZUSAMMENFÜHRUNG DER GRUPPENERGEBNISSE

Die ganze Klasse an den Ergebnissen der einzelnen Gruppen teilhaben zu lassen, kann ein heikler Punkt werden. In Klasse A wurden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, zu diesem Zweck Referate auszuarbeiten, was gut funktionierte. Dieses Vorhaben ließ sich nicht in Klasse B durchführen, da hier viele Jugendliche deutliche Hemmungen hatten, sich vor ihren Klassenkameraden zu präsentieren. So schlug die Lehrerin stattdessen vor, dass jeder einmal eine der Aufgaben, die täglich den Gruppen gestellt wurden, für alle an der Tafel erklärt und löst. Da es jeden einmal traf, machte sich kein Widerspruch breit, und es wurde selbstverständlich, vor der Klasse seine Arbeit darzustellen. Doch der Ehrgeiz, wie in Klasse A, allen zu einem Verständnis zu verhelfen, fehlte.

Je nach Klassengestalt sind hier Ideen gefordert, wie man diejenigen an den Ergebnissen der anderen Gruppen teilhaben lassen kann, für die es sinnvoll ist. An dieser Stelle ist es wiederum nützlich, zu erkennen, welche Inhalte für welche Jugendlichen passen und welche nicht.

LERNZIELÜBERPRÜFUNG

Nachdem also alle Schülerinnen und Schüler an ihren Aufgaben und Forschungsfragen gearbeitet haben, entsteht bei ihnen das Bedürfnis, zu wissen, ob sie ihr Ziel erreicht haben.

Es ist ratsam, bereits etwa in der Mitte der Epoche mit den einzelnen Jugendlichen zu besprechen, was sie erreichen möchten, und mit ihnen Zielvereinbarungen zu treffen. So gibt es bei einigen den Wunsch, Zusammenhänge erklären zu können, wie bei Laura oder Mareike, während andere vorrangig die Gründe verstehen möchten, wie es zu einem bestimmten Ergebnis kommt.

Für viele ist es außerdem sinnvoll, sich mit den erworbenen Kenntnissen in einem Test zu bewähren. Dieser kann aufgrund der unterschiedlichen Tätigkeiten kein einheitlicher für die ganze Klasse sein, sondern es gibt verschiedene, die sich an den Inhalten der einzelnen Gruppen orientieren. Die Schülerinnen und Schüler wählen sich, gemäß ihren Fähigkeiten und Kenntnissen, selbst einen oder mehrere Tests zur Bearbeitung aus.

Im Folgenden einige Beispiele für Tests zur Kombinatorikepoche:

Test zur Kombinatorik (Listen A)

1. a) Aus den Zahlen 1 2 3 4 5 6 sollen zwei Zahlen ausgewählt werden.
   Schreibe alle Möglichkeiten systematisch auf.
   b) Aus den Zahlen 1 2 3 4 5 6 sollen drei Zahlen ausgewählt werden.
   Schreibe alle Möglichkeiten systematisch auf.
   c) Wie kannst Du am Pascalschen Dreieck überprüfen, ob Du alle Möglichkeiten aufgeschrieben hast?

2. Eine Fahne soll drei Streifen mit unterschiedlichen Farben bekommen.
   Es stehen fünf Farben zur Auswahl: Blau, Rot, Grün, Orange, Schwarz.
   Zeichne ein Baumdiagramm, das alle Möglichkeiten aufzeigt.

3. Wähle eine Aufgabe aus:
   a) Eine Münze wird fünfmal geworfen. Zweimal davon fällt Zahl (Z), dreimal Kopf (K). Schreibe alle möglichen Wurfkombinationen systematisch auf.
   b) Eine Münze wird sechsmal geworfen. Dreimal davon fällt Zahl (Z), dreimal Kopf (K). Schreibe alle möglichen Wurfkombinationen systematisch auf.

Test zur Kombinatorik (Listen B)

1. a) Aus den Buchstaben A B C D E F sollen zwei Buchstaben ausgewählt werden.
   Schreibe alle Möglichkeiten systematisch auf.
   b) Aus den Buchstaben A B C D E F sollen drei Buchstaben ausgewählt werden.
   Schreibe alle Möglichkeiten systematisch auf.
   c) Wie kannst Du am Pascalschen Dreieck überprüfen, ob Du alle Möglichkeiten aufgeschrieben hast?

2. Eine Fahne soll drei Streifen mit unterschiedlichen Farben bekommen.
   Es stehen fünf Farben zur Auswahl: Blau, Rot, Grün, Orange, Schwarz.
   Zeichne ein Baumdiagramm, das alle Möglichkeiten aufzeigt.

3. Wähle eine Aufgabe aus:
a) Eine Münze wird sechsmal geworfen. Zweimal davon fällt Zahl (Z), viermal Kopf (K). Schreibe alle möglichen Wurfkombinationen systematisch auf.
b) Eine Münze wird sechsmal geworfen. Dreimal davon fällt Zahl (Z), dreimal Kopf (K). Schreibe alle möglichen Wurfkombinationen systematisch auf.

Test zur Kombinatorik (Formeln)

1. Bei einem Pferderennen nehmen acht Pferde teil.
a) Wie viele mögliche Reihenfolgen gibt es, in der sie durch das Ziel laufen können?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die ersten drei Plätze zu belegen?

2. Aus einer Gruppe von 15 Personen sollen fünf Personen ausgewählt werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, dies zu tun?

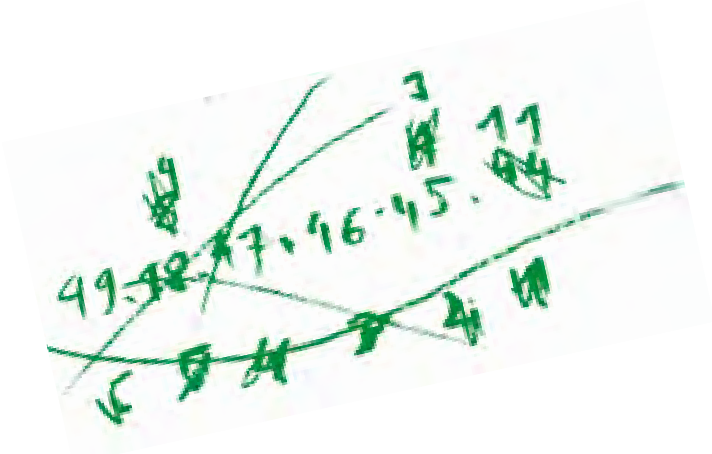
3. Was bedeutet 12! und was n! ? Was kann man damit berechnen?

4. Beim Minilotto werden aus 20 verschiedenen Zahlen vier Zahlen gezogen.
Auf dem Lottozettel werden vier Zahlen ausgewählt.
Wie viele Lottozettel müsste man ausfüllen, um auf jeden Fall vier „Richtige“ zu haben?

5. Berechne folgende Zahlen des Pascalschen Dreiecks:

$\binom{16}{4} =$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$



Test zur Kombinatorik (Listen C)

1. **A**nja, **B**ernd, **C**hristine und **D**avid wollen miteinander paarweise tanzen.
Welche Tanzpaare können gebildet werden, wenn auch Mädchen mit Mädchen und Jungen mit Jungen tanzen? Liste alle Möglichkeiten auf.

2. **A**nton, **B**astian, **C**hristian, **D**aniel und **E**mil wollen ein Skat-Turnier veranstalten.
In welchen Zusammensetzungen können sie spielen und wie viele Spiele muss es geben, wenn sie alle Kombinationen ausprobieren wollen?

3. Eine Münze wird sechsmal geworfen. Vervollständige die Liste der Würfe, bei denen zweimal Zahl (Z) und viermal Kopf (K) vorkommt:

ZZKKKK	ZKZKKK	ZKKZKK	______	______
ZKZKKK	ZKKZKK	______	______	
ZK______	ZK______	______		
ZK______	ZK______			
ZK______				
KZZKKK	______	______	______	
KZKZKK	______	______		
______	______			
______				
KKZZKK	______	______		
KKZ______	______			
KKZ______				
KKKZZK	______			
KKK______				
KKKKZZ				

Test zur Kombinatorik (Forschungsfragen)

1. a) Nimm eine 1x1-Reihe Deiner Wahl und markiere sie im Pascalschen Dreieck.
   b) Führe das Muster auch dort weiter, wo keine Zahlen des Dreiecks berechnet sind.
   c) Wie gehst Du beim Einfärben vor?
2. a) Multipliziere folgende Klammern aus:

   $(a+b)^2 =$

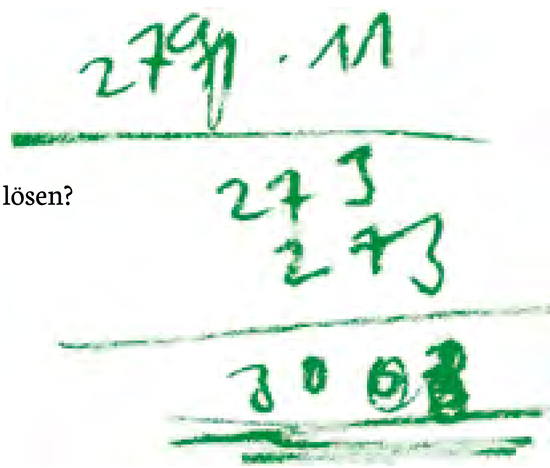
   $(a+b)^3 =$

   $(a+b)^4 =$

   $(a+b)^5 =$

   b) Wie kann man diese Aufgabe mithilfe des Pascalschen Dreiecks lösen? Zeige dies am Beispiel:

   $(a+b)^7 =$



ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Was ist nun dasjenige, was diese Epoche geeignet macht für inklusive Klassen? Die Inhalte unterscheiden sich nicht wesentlich von den sonst üblichen Epochen.

Gewöhnlich konzipiert man den Unterricht so, dass ein gemeinsames Ziel für die ganze Klasse definiert wird und einzelne Schüler diesem Ziel mehr oder weniger nahekommen können. Diese Methode lässt dann ein einheitliches Bewertungsschema zu, das unabhängig ist von den biografischen Erfordernissen eines Einzelnen. Es nimmt keine Rücksicht auf individuelle Schicksalsmotive, sondern sorgt für juristisch absicherbare Vergleichsskalen.

Der Unterschied bei dem hier beschriebenen Vorgehen besteht größtenteils darin, dass nicht alle Schülerinnen und Schüler alles bearbeiten und erlernen. Aber jeder, der gewillt und fähig dazu ist, kann alles mitmachen.

Die schwierigsten Phasen sind immer diejenigen, in der die ganze Klasse gemeinsam etwas erarbeitet. Hier muss man Inhalte und Fragestellungen finden, die jeden etwas angehen. Es darf aber auch durchaus vorkommen, dass in einer Phase einmal nur die mathematisch besonders interessierten Jugendlichen einen Gedankengang entwickeln, wenn dadurch die anderen erleben können, wozu ihre Mitschülerinnen und Mitschüler fähig sind. Doch auch die Lernfortschritte der mathematisch weniger begabten Jugendlichen sollten von der ganzen Klasse gewürdigt werden. Wesentlich ist, dass alle mitverfolgen, wie jeder in der Klasse seine eigenen Fortschritte macht.

Die verschiedenen Durchgänge der hier geschilderten Epoche wurden von der Lehrerin als unterschiedlich erfolgreich beurteilt. Auch verliefen niemals alle Phasen gleich gut. Die Einstiegsphase hat sich in allen Durchläufen sehr bewährt. Das Verhalten der Jugendlichen in den Unterrichtsphasen mit der ganzen Klasse und bei der Vorstellung von Ergebnissen schwankte stark und verlangte stets neue Ideen. Auch das selbstständige Ergreifen der Übungsaufgaben gelang unterschiedlich gut. Es ist somit fraglich, inwieweit diese Epoche in dieser Form bestehen bleiben wird. Sicherlich verändert sie sich im Laufe der Jahre, sodass man sie vielleicht in zehn Jahren kaum wiedererkennen wird. Doch es gibt einige Grundprinzipien, auf denen sie aufgebaut ist und die für einen inklusiven Unterricht allgemein gültig sind:

Einstimmung auf ein gemeinsames Thema

In erzählerischer Weise und im Gespräch mit der Klasse wird auf das Thema eingestimmt. Möglichst viele Beiträge von Schüler- und Lehrererlebnissen sind erwünscht. Wichtig ist stets, die Verbindung des Themas zum Menschsein herzustellen. Ohne eine gewisse Bedeutungsschwere schwindet der Anreiz, sich mit dem Thema zu beschäftigen, gerade wenn ein Schüler der Meinung ist, dieses Thema läge ihm nicht.

Synchrone Arbeitsphasen unterschiedlichen Inhalts

Es gibt verschiedene Arbeiten am Thema mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden, unterschiedlichen Tätigkeitsbereichen und verschiedenen qualitativen Zugängen wie künstlerisch, denkerisch, recherchierend, willenshaft und anderes.

Zielabsprachen

Es wird ein Konsens mit dem Schüler angestrebt, was zu erreichen sinnvoll wäre. Dazu ist ein offenes Vertrauensverhältnis unabdingbar. Die Ziele sollten so weit gesteckt werden, dass sie auch eine Herausforderung darstellen und der Schüler über seine bisherigen Grenzen hinauswachsen kann. Die Lehrperson muss an der Haltung: „An diesem Anspruch kommst du nicht vorbei!“ beharrlich festhalten können und daher genau erspüren, was dem Schüler zugemutet werden kann.

Zusammentragen und Teilhabe

Damit die Klasse nicht auseinanderbricht, braucht es immer wieder Bestandsaufnahmen. Das Erlebnis, an einem Projekt teilzunehmen und einen Beitrag zu leisten, wirkt sinnstiftend. Es bildet Respekt und Einfühlungsvermögen, wenn die Jugendlichen erleben, wie die Mitschüler ihre Lernwege beschreiten und welche Hindernisse sie dabei überwinden.

Lernfortschritte erlebbar machen

Die einfachste Form sind Tests. Jeder erfolgreich absolvierte Test vermittelt das positive Gefühl, etwas erreicht zu haben, sofern er angemessen schwierig ist. Aber auch Referate, Werkstücke, künstlerische Objekte oder erfolgreiche Vermittlungstätigkeiten sind geeignet.

Nicht immer wird man alle diese Elemente vollständig umzusetzen wissen. Bei der Konzeption einer Epoche wird man sich entscheiden müssen, was im Wesentlichen dran ist für eine Klasse, und den Schwerpunkt entsprechend setzen. Vielleicht wird alles im Verlauf der Epoche ganz anders, als man es sich vorgestellt hat. Eine möglichst nüchterne Auswertung mit allen Beteiligten wird dann für den forschenden Lehrer fruchtbar für die nächste Epoche werden. Denn Unterricht sollte stets eines sein: für alle ein ewiges spannendes Abenteuer!

FLORIAN SCHULZ, DR., JAHRGANG 1958, VERHEIRATET, ZWEI KINDER. OBERSTUFENLEHRER FÜR MATHEMATIK, PHYSIK UND INFORMATIONSTECHNOLOGIE AN DER WINDRATHER TALSCHULE IN VELBERT-LANGENBERG. ER IST IN DER LEHRERAUSBILDUNG AM LEHRERSEMINAR KASSEL FÜR OBERSTUFENLEHRER AN WALDORFSCHULEN TÄTIG UND ENTWICKELT LEHRGERÄTE FÜR DEN PHÄNOMENOLOGISCHEN PHYSIKUNTERRICHT AN WALDORFSCHULEN.

IMPRESSUM

Herausgeber

Bärbel Blaeser
Projekt „Entwicklungsimpulse durch inklusive Pädagogik“
beim Bund der Freien Waldorfschulen

Redaktion

Bärbel Blaeser, Helga Karig

Anschrift der Redaktion

Bärbel Blaeser
Am Schmachtenberg 14
42555 Velbert
b.blaeser33@gmx.de

Der Blickwechsel ist Bestandteil des Projektes „Entwicklungsimpulse durch inklusive Pädagogik“, das vom Bund der Freien Waldorfschulen e.V. und durch großzügige finanzielle Unterstützung der Software-AG-Stiftung getragen wird. Seine Herausgabe findet in Kooperation mit der Pädagogischen Forschungsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen e.V. sowie dem Arbeitskreis Inklusion, ebenfalls beim Bund der Freien Waldorfschulen, statt.

Die Redaktion des Blickwechsels ist in der Auswahl und der inhaltlichen Gestaltung der Redaktionsbeiträge frei und nicht weisungsgebunden. Die Verantwortung für den Inhalt der Beiträge tragen die Verfasser. Bildquelle: Windrather Talschule, soweit nicht anders angegeben.

Der Blickwechsel erscheint viermal im Jahr und wird direkt an die Waldorfschulen und Seminare versandt. Anfragen diesbezüglich bitte an die Geschäftsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen, Wagenburgstr. 6, 70185 Stuttgart; Tel.: 0711/21042 - 0.

gedruckt auf LuxoArt samt 150/300 g/m² bei Printmedienservice Enßen, Jägerweg 25, 45525 Hattingen

Pädagogische Forschungsstelle beim Bund der Freien Waldorfschulen
Wagenburgstraße 6 _ 70184 Stuttgart

Sie finden uns im Internet unter
www.forschung-waldorf.de
www.waldorfbuch.de

ISBN 978-3-944911-35-9

Satz und Gestaltung
zeichenware designbureau

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.


...DENN UNTERRICHT SOLLTE STETS EINES
SEIN: FÜR ALLE EIN EWIGES SPANNENDES
ABENTEUER!
edition waldorf