Kollineationen als Erzeugnis von Zentralprojektionen und Zentralkollineationen

Peter Baum*

Zusammenfassung. Eine Kollineation ist eine umkehrbare Abbildung π einer projektive Ebene E auf sich mit folgenden Eigenschaften:

- Jeder Punkt $P \in E$ hat genau einen Bildpunkt $P' = \pi(P) \in E$.
- Jede Gerade $g \in E$ hat genau eine Bildgerade $g' = \pi(g) \in E$.
- P' und g' inzidieren genau dann, wenn auch P und g inzidieren.

Infolge des Fundamentalsatzes[1] ist eine Kollineation durch vier Elemente in allgemeiner Lage und deren Bildelemente eindeutig bestimmt.

Sind zwei Ebenen E und E' und ein Projektionszentrum Z außerhalb der beiden Ebenen gegeben, so ist dadurch eine Zentralprojektion $E \underset{Z}{\rightarrow} E'$ folgendermaßen bestimmt: Zu jedem Punkt $P \in E$ gibt es einen Projektionsstrahl ZP, der die Ebene E' in genau einem Bildpunkt $P' \in E'$ trifft. Daraus folgt, dass auch zu jeder Geraden $g \in E$ genau eine Bildgerade $g' \in E'$ existiert.

Man kann nun drei Zentralprojektionen folgendermaßen miteinander verketten:
$E \underset{Z_1}{\rightarrow} E' \underset{Z_2}{\rightarrow} E'' \underset{Z_3}{\rightarrow} E$. Dadurch entsteht schließlich eine projektive Abbildung der Ebene E auf sich, die jedem Punkt in E genau einen Bildpunkt in E und jeder Geraden in E genau eine Bildgerade in E zuordnet mit Erhaltung der Inzidenz. Es ensteht also auf diese Weise eine Kollineation.

Aus einer solchen Verkettung ergeben sich zunächst sehr anschaulich die verschiedenen Eigenschaften einer Kollineation. Wir zeigen, dass sich jede Kollineation durch eine solche Verkettung dreier Zentralprojektionen erzeugen läßt.

1 Verkettung von Zentralprojektionen

Gegeben sei ein räumliches Koordinatensystem x, y, z mit dem Ursprung O sowie drei Projektionszentren $Z_k \neq O$, $k = 1, 2, 3$. Die Koordinatenebenen bezeichnen wir mit E_{xy},

*p.baum@posteo.de 16.04.2023, Fassung vom 13.06.2023

[1] Siehe Stolzenburg, *Projetive Geometrie*, S. 63

E_{yz}, E_{xz}.

- Durch Z_1 wird die xy-Ebene auf die yz-Ebene projiziert, Z_1 darf also in keiner dieser beiden Ebenen liegen.
- durch Z_2 wird die yz-Ebene auf die zx-Ebene projiziert, Z_2 darf also in keiner dieser beiden Ebenen liegen.
- durch Z_3 wird die zx-Ebene auf die xy-Ebene projiziert, Z_3 darf also in keiner dieser beiden Ebenen liegen.

Jeder Punkt Q der xy-Ebene durchläuft dann eine Punktfolge

$$Q \in E_{xy} \to Q' \in E_{yz} \to Q'' \in E_{xz} \to Q''' = P \in E_{xy}$$

eines räumlichen Vierecks. P heißt der Bildpunkt von Q und Q heißt Urbildpunkt von P. Es entsteht auf diese Weise eine umkehrbar eindeutige Abbildung der xy-Ebene auf sich. Man nennt sie eine **Projektivität** oder **Kollineation** π. Wir bezeichnen die drei Zentralprojektionen mit π_i und schreiben für die Verkettung $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3$. Wir bemerken noch:

- die y-Achse ist Fixpunktgerade von π_1,
- die z-Achse ist Fixpunktgerade von π_2,
- die x-Achse ist Fxpunktgerade von π_3.

Aus den Eigenschaften der Zentralprojektion folgt für die Kollineation π unmittelbar:

1. Jede Gerade wird in eine Gerade abgebildet.
2. Es gibt mindestens einen Fixpunkt: den Ursprung O. Denn er ist bezüglich aller drei Projektionen ein Fixpunkt.
3. Es gibt mindestens eine Fixgerade: die Schnittgerade f der Ebene $E_Z = Z_1Z_2Z_3$ mit der xy-Ebene. Denn liegt Q auf f, so liegen auch alle Bildpunkte Q', Q'', P in der Ebene E_Z, also liegt auch P auf f, d.h. f ist Fixgerade.
4. Es gibt eine Fluchtgerade: das Bild der Ferngeraden.
5. Es gibt eine Verschwindungsgerade: das Urbild der Ferngeraden.

Es ist klar, dass die Kollineation $\pi : E_{xy} \to E_{xy}$ durch die Lage der Projektionszentren Z_k eindeutig bestimmt wird. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass verschiedene Lagen der Z_k dennoch dieselbe Kollineation erzeugen können.

1.1 Fixpunkte und Fixgeraden

Wie man die Fixpunkte und Fixgeraden einer allgemeinen Kollineation bestimmen kann, sowohl durch geometrische Überlegungen unter Verwendung von Kegelschnitten als auch durch Rechnung unter Verwendung von Matrizen hat Alexander Stolzenburg in seinem Buch *Projektive Geometrie* ausführlich dargestellt (S. 261 f.). Die Darstellung durch Zentralprojektionen hier liefert einen sehr anschaulichen Zugang zu der Frage, welche Anzahlen von Fixelementen möglich sind.

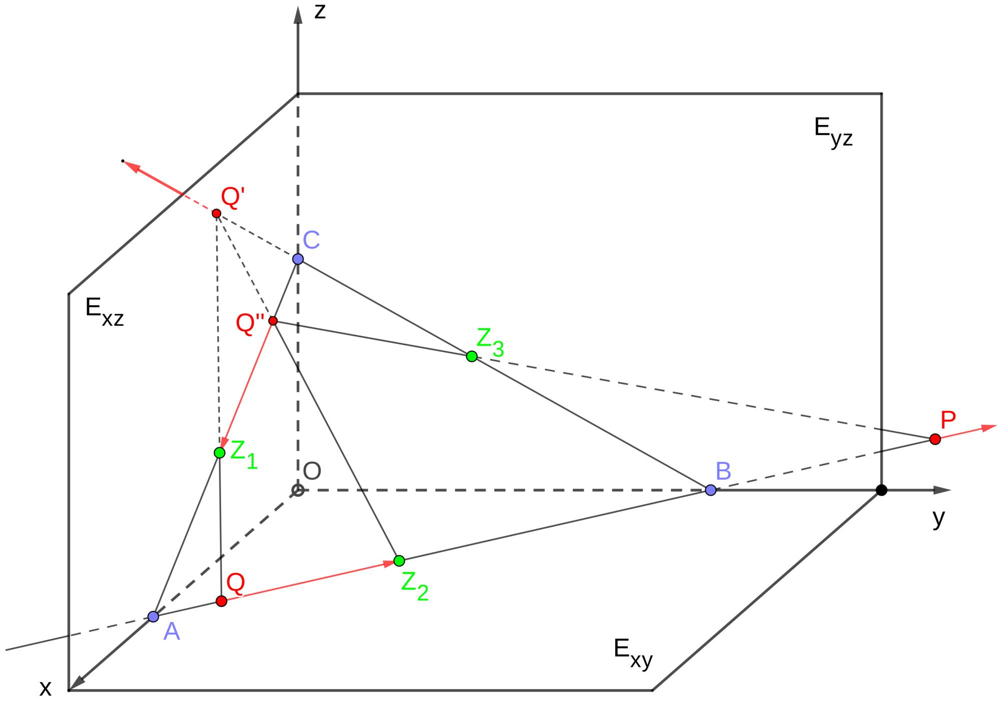

Abbildung 1: Verkettung

Wir untersuchen nun, ob eine Kollineation π außer dem Ursprung und der in E_Z liegenden Fixgeraden noch weitere Fixpunkte bzw. Fixgeraden haben kann. Dabei setzen wir voraus, dass die drei Z_i nicht alle in *einer* Geraden liegen.

Behauptung 1. Liegen alle Projektionszentren Z_i in den Koordinatenebenen, so induziert die Kollineation π in der Fixgeraden eine Involution.

Beweis. Die Verkettung der drei π_i in Abb. 1 liefert einerseits die Punktfolge $A \to A' = C \to A'' = A''' = B$ und andererseits die Punktfolge $B = B' \to B'' = B''' = A$. Die Punkte A und B sind in der Kollineation π also wechselseitig zugeordnet und daher ist nach einem Satz über Involutionen[2] in einer Geraden die Projektivität in der Fixgeraden eine Involution, q.e.d. □

Bemerkung 1. Es gibt Kollineationen, die in ihrer Fixgerade keine Involution erzeugen.

Beispiel:

$$x' = \frac{u+v}{1-u} \qquad\qquad y' = \frac{u-v}{u-1}$$

[2]Siehe Stolzenburg, *Projektive Geometrie*, S. 109

Offenbar ist $v = 1$ die Gleichung der Fixgeraden von π, denn dann folgt $y' = 1$. Wenn in der Fixgerade eine Involution erzeugt würde, müsste $\pi^2(Q) = Q$ sein, für $v = 1$ also

$$u = \pi^2(u) = \frac{x+1}{1-x} = -\frac{1}{u} \qquad \Rightarrow \qquad u^2 + 1 = 0$$

Die Gleichung $u^2 + 1 = 0$ hat aber keine reelle Lösung, also gibt es in der Fixgerade keinen Punkt Q mit $\pi^2(Q) = Q$.

Solche Kollineationen können also nicht durch die Verkettung dreier Zentralprojektionen erzeugt werden, bei denen *alle* Projektionszentren in jeweils einer der drei Projektionsebenen liegen.

Behauptung 2. Hat die durch die drei Projektionszentren Z_1, Z_2, Z_3 erzeugte Kollineation einen von O verschiedenen Fixpunkt F, so liegt F in der Ebene $E_Z = Z_1Z_2Z_3$ und damit auf der Fixgeraden f.

Beweis. Die beiden Projektionsstrahlen $p_1 = QZ_1Q'$ und $p_2 = Q'Z_2Q''$ treffen sich in Q' und liegen daher in einer Ebene, in der auch die drei Punkte Q, Q' und Q'' liegen. Der dritte Projektionsstrahl $p_3 = Q''Z_3P$ liegt im allgemeinen nicht in derselben Ebene $QQ'Q''$ wie p_1 und p_2, denn wäre es so, würden die sechs Punkte Q, Q', Q'', Z_1, Z_2, Z_3 stets in einer Ebene liegen, also auch P als Punkt in p_3, und P würde immer in der Fixgeraden liegen, was nicht der Fall ist. Wenn jedoch Q ein Fixpunkt ist, also $Q = P$, dann liegt auch p_3 in der Ebene $QQ'Q'' = Z_1Z_2Z_3$ und P damit in der Fixgeraden, q.e.d. □

Behauptung 3. Es seien A, B und C die (verschiedenen) Schnittpunkte der Ebene $E_Z = Z_1Z_2Z_3$ mit der x-Achse, der y-Achse und der z-Achse. Liegt Z_1 auf der endlichen Strecke $\overline{CA}$ in der zx-Ebene, Z_2 auf der Strecke $\overline{AB}$ in der xy-Ebene und Z_3 auf der Strecke $\overline{BC}$ in der yz-Ebene, so ist der Ursprung O der einzige Fixpunkt und die Gerade $f = AB$ die einzige Fixgerade der Kollineation (siehe Abb. 1).

Beweis. Q sei ein Punkt auf der Geraden $f = AB$. Die Gerade QZ_1 durchstößt die Ebene E_{yz} im Punkt Q', die Gerade QZ_2 durchstößt die Ebene E_{xz} im Punkt Q'', und die Gerade $Q''Z_3$ durchstößt die Ebene E_{xy} im Bildpunkt P von Q. Wandert nun Q auf der Geraden AB von A nach B, so dreht sich die Gerade QQ' um den festen Punkt Z_1 in der Ebene E_Z und Q' wandert auf der festen Geraden BC von C über den Fernpunkt nach B, und Q''wandert auf CA von C nach A, und P wandert auf AB von B über den Fernpunkt nach A. Für $Q = A$ ist offenbar $Q' = Q'' = C$ und $P = B$, also ist B ist der Bildpunkt von A. Für $Q = B$ ist auch $Q' = B$ und $Q'' = P = A$, also ist A der Bildpunkt von B. Das Innere der Strecke $\overline{AB}$ wird auf das Äußere derselben abgebildet und umgekehrt. Also kann es keine Fixpunkte auf $f = AB$ geben. Da nach der Behauptung 2 außer O alle Fixpunkte auf f liegen müssen, hat die Kollineation nur einen Fixpunkt.

Da der gemeinsame Punkt einer zweiten Fixgerade mit f ein Fixpunkt wäre, hat die Kollineation auch keine zweite Fixgerade, q.e.d. □

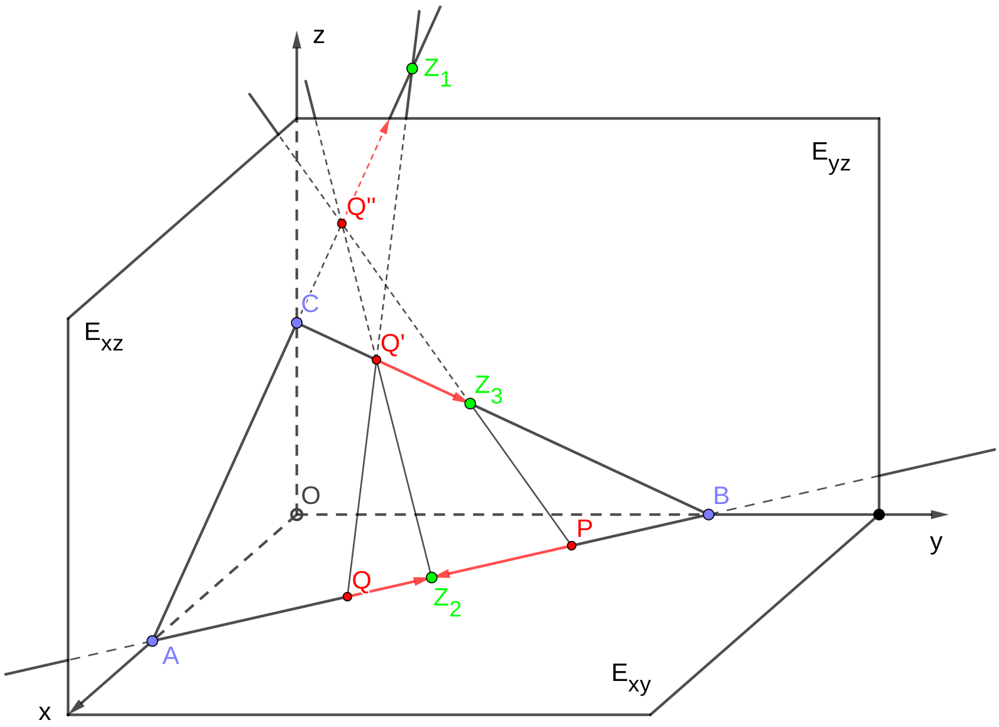

Abbildung 2: Drei Fixpunkte

Behauptung 4. Es seien A, B und C die drei Schnittpunkte der Ebene $E_Z = Z_1Z_2Z_3$ mit den Koordinatenachsen und es sei $Z_1 \in AC$, $Z_2 \in AB$ und $Z_3 \in BC$. Liegt eines der Projektionszentren (z.B. Z_1) außerhalb des euklidischen Dreiecks ABC (Abb. 2), so besitzt die Kollineation genau drei Fixpunkte und drei Fixgeraden.

Beweis. Wandert Q auf der Geraden AB von A nach B, so wandert sein Bildpunkt P ebenfalls auf AB, aber in entgegengesetzter Richtung. Daher treffen sich Q und P zweimal, es gibt also zwei Fixpunkte auf der Geraden AB, innerhalb der Strecke $\overline{AB}$ einen Fixpunkt F_1 und außerhalb einen Fixpunkt F_2. Die Geraden OF_1 und OF_2 sind dann zwei weitere Fixgeraden.
Nach der Behauptung 2 kann es außer O keine weiteren Fixpunkte außerhalb der Fixgeraden $f = AB$ geben. Die Verkettung der drei Zentralprojektionen liefert also in diesem Fall eine Kollineation der xy-Ebene auf sich mit genau drei Fixpunkten und genau drei Fixgeraden q.e.d. □

Behauptung 5. Die Ebene $E_Z = Z_1Z_2Z_3$ möge durch den Ursprung O gehen (siehe Abb. 3), und alle drei Projektionszentren liegen in den Koordinatenebenen. Dann hat die durch die drei Zentralprojektionen erzeugte Kollineation π genau zwei Fixpunkte und zwei Fixgeraden.

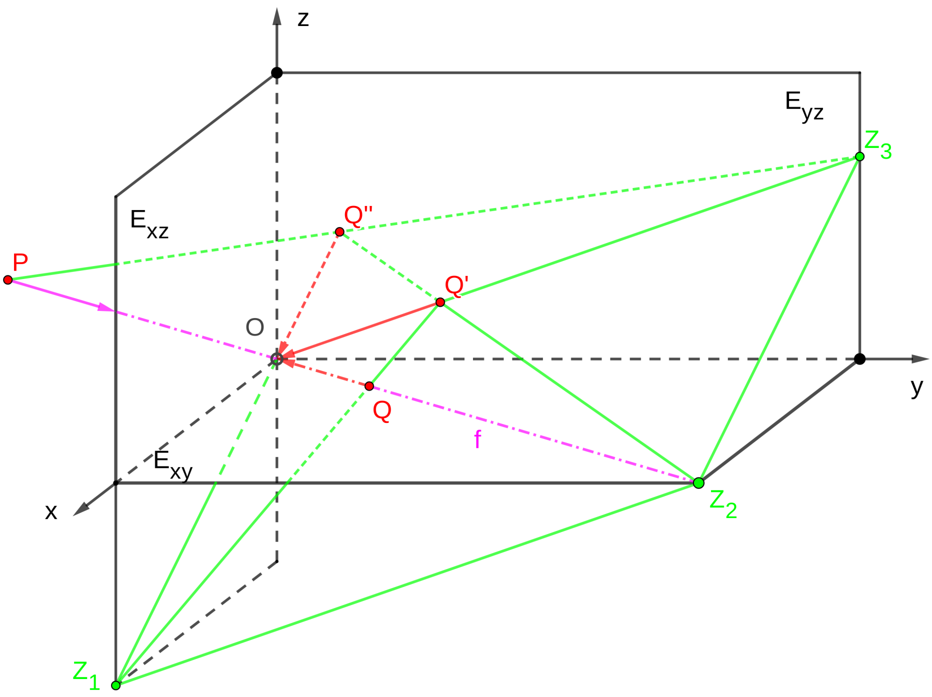

Abbildung 3: Zwei Fixpunkte und Fixgeraden

Beweis. Die Ebene E_Z schneidet die Ebene E_{xy} in der Fixgeraden $f = OZ_2$. Es sei $Q \in f$ ein Punkt in der Fixgeraden. Der Projektionsstrahl Z_1Q liegt dann ebenfalls in E_Z und trifft daher die Ebene E_{yz} in einem Punkt Q' in der Geraden OZ_3. Der Projektionsstrahl Z_2Q' liegt ebenfalls in E_Z und trifft die Ebene E_{xz} in einem Punkt Q'' der Geraden OZ_1. Der Projektionsstrahl Z_3Q'' liegt ebenfalls in E_Z und trifft die Ebene E_{xy} im Bildpunkt P der Fixgeraden f.

Wandert nun Q in f in Richtung O, so wandert Q' in der Geraden OZ_3 und Q'' in der Geraden OZ_1 und P in der Geraden $f = OZ_2$ ebenfalls in Richtung O, wo sich alle Punkte gleichzeitig treffen. P und Q bewegen sich gegenläufig, daher gibt es einen zweiten Fixpunkt $F \in f$ und infolge dessen auch eine zweite Fixgerade $f' = OF$, q.e.d. $\square$

1.2 Konstruktion weiterer Bildpunkte

Während die Konstruktion weiterer Bildpunkte einer Kollineation, die durch vier Punktepaare in der xy-Ebeme gegeben ist, sehr schwierig und aufwendig ist, ist sie durch die drei Zentralprojektionen sehr einfach.

Wir gehen von der Abbildung 1 aus. Wir können dort zunächst für einen zweiten Punkt $Q_1 \in f$ den Bildpunkt P_1 konstruieren.

Es sei g eine beliebige Gerade in E_{xy} durch den Punkt Q. Sie trifft die y-Achse in einem Punkt R. Dieser ist Fixpunkt von π_1, daher ist $g' = RQ'$. Die Gerade RZ_2 trifft die Ebene E_{xz} in der x-Achse in einem Punkt S, daher ist $g'' = \pi_2(g') = SQ''$. Da S Fixpunkt von π_3 ist, ist schließlich $g''' = \pi(g) = \pi_3(g'') = SP$.

Ebenso können wir für eine beliebige Gerade h in E_{xy}, die durch Q_1 geht, die Bildgerade $h''' = \pi(h)$ konstruieren.

Ist nun T ein beliebiger Punkt in E_{xy} und $g = TQ$ und $h = TQ_1$, so ist der Bildpunkt $\pi(T) = g'''h'''$.

1.3 Die allgemeine Kollineation als Verkettung dreier Zentralprojektionen

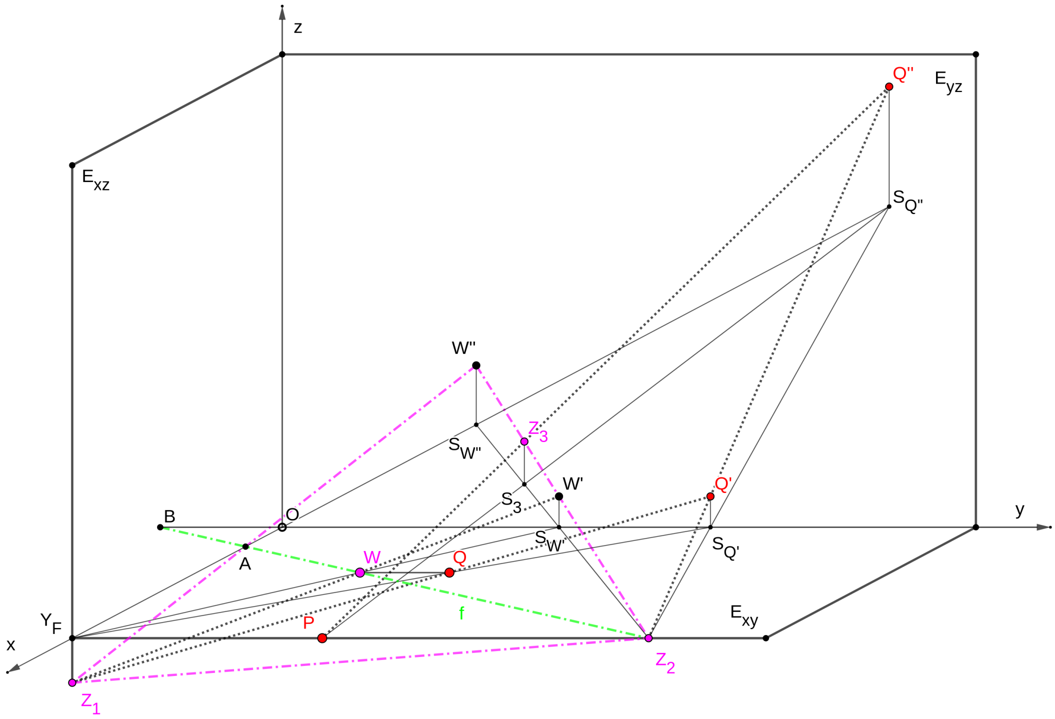

Abbildung 4: Allgemeine Kollineation

Satz. *Jede Kollineation π in einer projektiven Ebene E ist als Verkettung $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 = \pi$ dreier Zentralprojektionen π_i darstellbar.*

Beweis. Bekanntlich hat jede Kollineation π mindestens einen Fixpunkt und mindestens eine Fixgerade f. Der Fixpunkt O sei der Ursprung eines Koordinatensystems und $E = E_{xy}$. Die Kollineation π sei keine Zentralkollineation, die Fixgerade f ist also keine Fixpunktgerade. Dann sei π durch folgende drei weitere Punktepaare gegeben: In f sei $W \in f$ ein Punkt und $\pi(W) = Z_2 \in f$ sein Bildpunkt. Es sei Y_∞ ein Fernpunkt und

Y_F sein Bildpunkt. Es sei OY_F die x-Achse und OY_∞ die y-Achse. Dann ist die Gerade WY_∞ eine Parallele zur y-Achse, welche in die Gerade Z_2Y_F abgebildet wird, die ebenfalls parallel zur y-Achse verläuft, wie noch zu zeigen ist. Es sei weiter $Q \in WY_\infty$ ein Punkt in der Geraden WY_∞ und $P = \pi(Q)$ sein Bildpunkt, der in der Bildgeraden Z_2Y_F liegen muss. Dann ist die Kollineation π durch die vier Punktepaare (O, O), (W, Z_2), (Y_∞, Y_F) und (Q, P) in allgemeiner Lage eindeutig bestimmt. Wir konstruieren nun die beiden Projektionszentren Z_1 und Z_3 folgendermaßen.

In der xy-Ebene E_{xy} (Abb. 4) sei O der Fixpunkt und f die Fixgerade der Kollineation. Die z-Achse geht dann durch O und ist orthogonal zu xy-Ebene E_{xy}.

Es sei $Z_1 \in E_{xz}$ ein beliebiger Punkt auf der durch Y_F gehenden Parallelen zur z-Achse. Die Gerade WY_F trifft die y-Achse in einem Punkt $S_{W'}$, und die Gerade WZ_1 trifft die durch $S_{W'}$ gehende Parallele zur z-Achse in einem Punkt W'. Die Gerade $Z_2S_{W'}$ trifft die x-Achse in einem Punkt $S_{W''}$, und die durch $S_{W''}$ gehende Parallele zur z-Achse trifft die Gerade OZ_1 in einem Punkt W''.

Nun konstruieren wir die Punkte Q' und Q'' der Punktfolge $Q \to Q' \to Q'' \to P$ folgendermaßen. Die Gerade QY_F trifft die y-Achse in einem Punkt $S_{Q'}$ und die Gerade QZ_1 trifft die durch $S_{Q'}$ gehende Parallele zur z-Achse in einem Punkt Q' . Die Gerade $Z_2S_{Q'}$ trifft die x-Achse in einem Punkt $S_{Q''}$ und die Gerade Z_2Q' trifft die durch $S_{Q''}$ gehende Parallele zur z-Achse in einem Punkt Q''. Schließlich trifft die Gerade PQ'' die Gerade Z_2W'' in einem Punkt Z_3.

Dann liegen in der Tat die Punkte W' und Q' in der Ebene E_{yz} und die Punkte W'' und Q'' in der Ebene E_{xz} und es ist

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(W) = W' & \pi_2(W') = W'' & \pi_3(W'') = Z_2 \\ \pi_1(Q) = Q' & \pi_2(Q') = Q'' & \pi_3(Q'') = P \end{array}$$

Da die y-Achse Fixpunktgerade der Zentralprojektion π_1 ist, ist $\pi_1(Y_\infty) = Y_\infty$. Da Y_∞ der Fernpunkt der y-Achse ist, verläuft der Projektionsstrahl Z_2Y_∞ parallel zur y-Achse und er trifft die x-Achse im Punkt $\pi_2(Y_\infty) = Y_F$. Da die x-Achse Fixpunktgerade der Zentralprojrktion π_3 ist, ist $\pi_3(Y_F) = Y_F$, nebenbei ein Punkt der Fluchtgeraden.

Übrigens folgt aus der räumlichen Interpretation der Abb. 4, dass die in der xy-Ebene liegende Gerade $PS_{Q''}$ auch durch den Fußpunkt S_3 des Lotes von Z_3 auf die xy-Ebene geht, was man gewiss auch zeigen kann, wenn man die ganze Zeichnung als eine Figur in der Zeichenebene auffasst.

Somit ist $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 = \pi$, q.e.d. □

2 Zentralkollineationen

Es seien Z_1 und Z_2 zwei Projektionszentren, die weder in der xy-Ebene noch in der xz-Ebene liegen. Dann gibt es zwei Zentralprojektionen $\pi_1 : E_{xy} \underset{Z_1}{\to} E_{xz}$ und $\pi_2 : E_{xz} \underset{Z_2}{\to} E_{xy}$, deren Verkettung $Q \in E_{xy} \underset{Z_1}{\to} Q' \in E_{xz} \underset{Z_2}{\to} P \in E_{xy}$ eine Kollineation

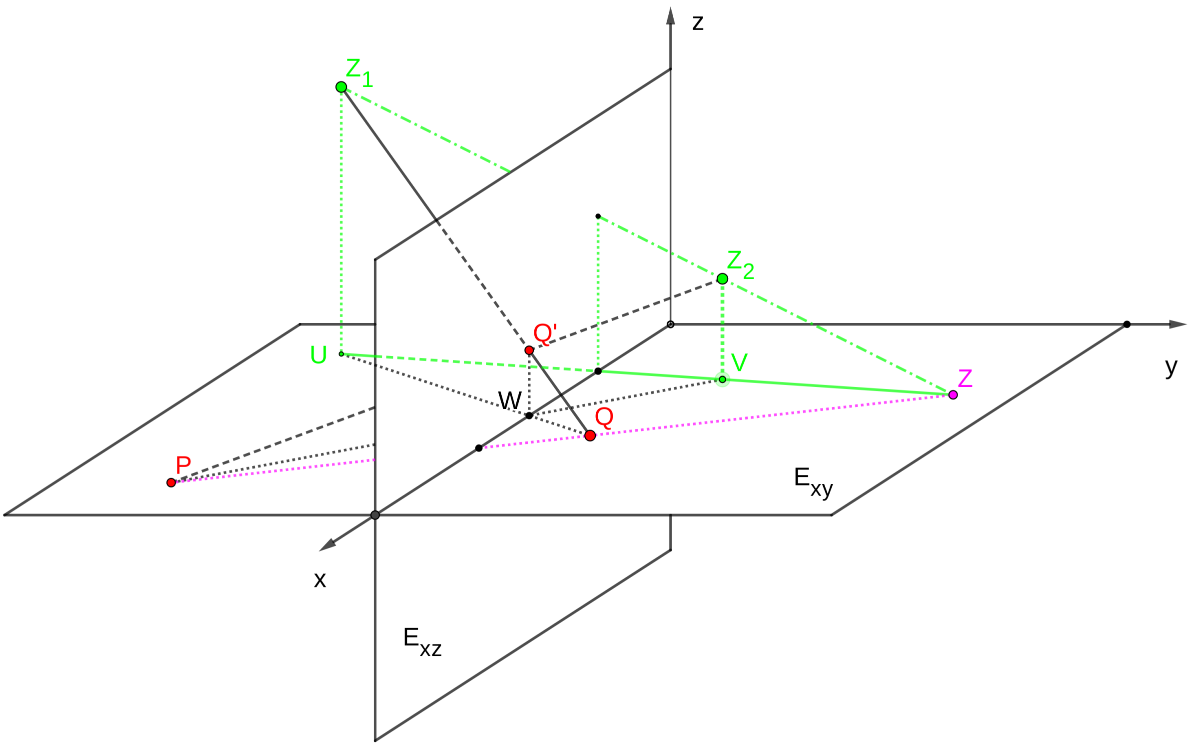

Abbildung 5: Zentralkollineation

$\pi(Q) = \pi_2(\pi_1(Q)) = P$ der xy-Ebene auf sich liefert. In der Abbildung 5 sind noch die Lote der drei Punkte Z_1, Z_2, Q' auf die Ebene E_{xy} mit ihren Fußpunkten U, V und W gezeichnet. Die Gerade Z_1Z_2 trifft die Ebene E_{xy} im Punkt Z. Die so erzeugte Kollineation heißt Zentralkollineation und hat folgende Eigenschaften:

- Es gibt eine Fixpunktgerade, man nennt sie die Achse der Kollineation. Denn liegt $Q = W$ (siehe Abb. 5) in der x-Achse als Schnittgerade von E_{xy} mit E_{xz}, so ist W wegen $\pi_1(W) = W$ und $\pi_2(W) = W$ ein Fixpunkt.
- Es gibt einen Fixgeradenpunkt Z, man nennt ihn das Zentrum der Kollineation. Dieser ist der Schnittpunkt der Geraden Z_1Z_2 mit der xy-Ebene E_{xy}. Denn es ist einerseits offenbar $\pi_2(\pi_1(Z)) = Z$ ein Fixpunkt. Andererseits trift jede durch Z gehende Gerade f die Achse in einem Fixpunkt, ist also eine Fixgerade, so dass $P = \pi(Q)$ in $f = QZ$ liegt.
- Da eine Kollineation durch vier Punkte in allgemeiner Lage und ihre Bildpunkte eindeutig bestimmt ist, genügt neben der Achse und dem Zentrum nur noch ein Punktepaar (Q, P) oder die Lage der Fluchtgerade (Bild der Ferngerade) oder die Lage der Verschwindungsgerade (Urbild der Ferngerade) zur Festlegung einer Zentralkollineation.

Aus der Abb. 5 folgt unmittelbar:

Satz. *Jede Zentralkollineation π kann durch die Verkettung zweier Zentralprojektionen erzeugt werden.*

Beweis. Sind in einer Ebene E die Achse a, das Zentrum Z und ein Punktepaar (Q, P) mit P in QZ gegeben, so kann man durch a eine beliebige zweite Ebene E', z.B. E_{xz} legen und außerhalb der beiden Ebenen einen beliebigen Punkt Z_1 festlegen. Die Gerade QZ_1 trifft dann die Ebene E' in einem Punkt Q' und die Gerade PQ' trifft dann die Gerade ZZ_1 in einem Punkt Z_2, weil die 5 Punkte Z, Q, P, Q',Z_1 in einer Ebene liegen, q.e.d. □

Wie man weitere Bildpunkte konstruieren kann, entnehme man z. B. dem Buch Projektive Geometrie von Alexander Stolzenburg, S. 198 f.

Satz. *Liegen die Projektionszentren dreier Zentralprojektionen π_i in einer Geraden, so ist die durch die Verkettung $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 = \pi$ erzeugte projektive Abbildung in der xy-Ebene eine Zentralkollineation.*

Beweis. Die Gerade $g = Z_1Z_2Z_3$ trifft die xy-Ebene in einem Fixpunkt Z. Es sei nun f irgendeine Gerade in E_{xy}, die durch Z geht, und $Q \in f$ irgend ein Punkt in f. Dann liegt der Bildpunkt $Q' = \pi_1(Q)$ in der Ebene $E = fg$, ebenso der Punkt $Q'' = \pi_2(Q')$ und der Punkt $Q''' = \pi_3(Q'')$, also liegt auch $Q''' = P \in E_{xy}$ in der Geraden f, die sich als eine Fixgerade erweist. Somit ist Z Träger eines Geradenbüschels aus Fixgeraden, d.h. ein Fixgeradenpunkt. Dann hat die Kollineation aber auch eine Fixpunktgerade, ist also eine ZK, q.e.d. □

2.1 Verkettung zweier Zentralkollineationen

Eine Kollineation π ist nach dem Fundamentalsatz[3] durch 4 Elemente (Punkte oder Geraden) in allgemeiner Lage und deren Bildelemente eindeutig bestimmt. Es ist aber im allgemeinen schwierig, weitere Bildelemente zu konstruieren. Dies gelingt jedoch ziemlich einfach, wie wir gleich sehen werden, wenn ein Fixelement von π bekannt ist. Bekanntlich[4] hat jede Kollineation mindestens einen Fixpunkt F und mindestens eine Fixgerade f.

Sind in einer Ebene E zwei Zentralkollineationen π_i durch ihre Zentren Z_i und ihre Achsen z_i und jeweils ein Punktepaar (Q_i, P_i), $i = 1, 2$ gegeben, so liefert ihre Verkettung $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ natürlich eine allgemeine Kollineation mit dem Fixpunkt $F = z_1z_2$ und der Fixgeraden $f = Z_1Z_2$. Die Konstruktion weiterer Bildpunkte und Bildgeraden ist dann relativ einfach. Wir zeigen nun:

Satz. *Jede Kollineation π kann durch Verkettung zweier Zentralkollineationen ZK dargestellt werden.*

[3] Siehe z.B. Stolzenburg, *Projektive Geometrie* S. 63
[4] Siehe z.B. Stolzenburg, *Projektive Geometrie* S. 257

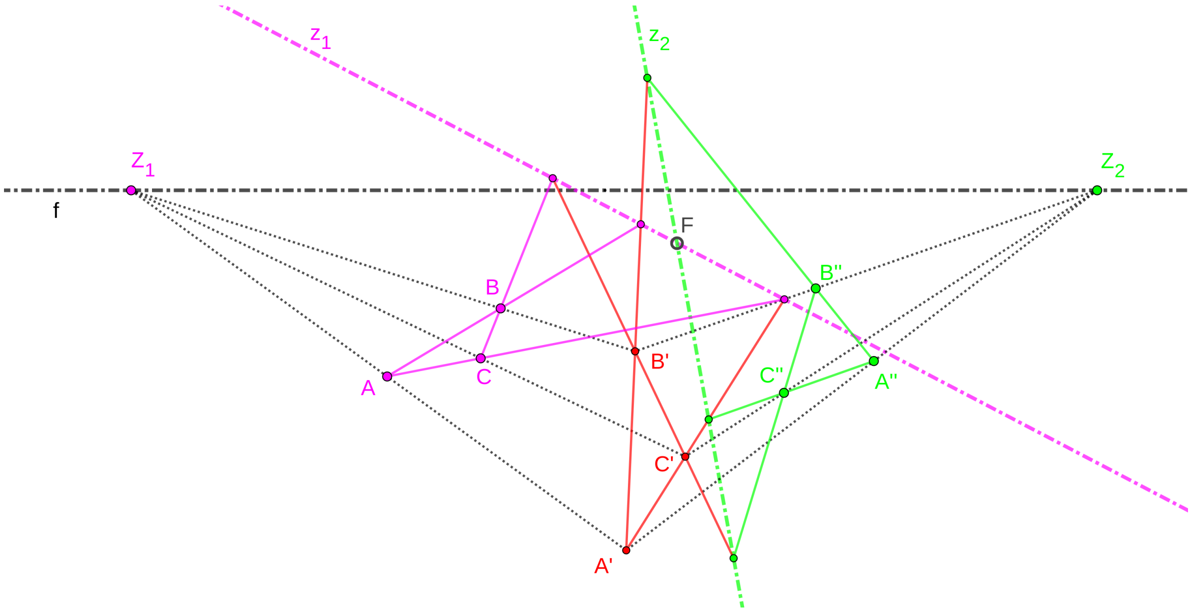

Abbildung 6: Verkettung von 2 ZK

Beweis. Eine Kollineation π sei durch eine Fixgerade f und ein nicht mit f inzidierendes Dreieck ABC und dessen Bilddreieck *A"B"C"* gegeben, also durch vier Elemente und deren Bildelemente in allgemeiner Lage. Wir konstruieren nun zwei Zentralkollineationen π_1 und π_2, deren Verkettung $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi$ die gegebene Kollineation erzeugt (Abb. 6).

Wir wählen in der Fixgeraden f zwei beliebige Zentren Z_1 und Z_2. Dann gibt es jeweils drei Projektionsstrahlen

$$\begin{array}{lll} a_1 = AZ_1 & b_1 = BZ_1 & c_1 = CZ_1 \\ a_2 = A''Z_2 & b_2 = B''Z_2 & c_2 = C''Z_2 \end{array}$$

die sich in einem dritten Dreieck $A' = a_1a_2$, $B' = b_1b_2$, $C' = c_1c_2$ treffen. Somit entstehen zwei Desargues-Figuren: Die Dreiecke ABC und A'B'C' sind durch das Zentrum Z_1 zentriert und die Dreiecke A'B'C' und $A''B''C''$ sind durch das Zentrum Z_2 zentriert. Zu jeder Desargues-Figur gehört eine Achse z_1 bzw. z_2, in der die drei Schnittpunkte der sich jeweils entsprechenden Seiten der Dreiecke liegen.

Durch Z_1 und z_1 ist eine Zentralkollineation π_1 gegeben, die das Dreieck ABC in das Dreieck A'B'C' abbildet, und durch Z_2 und z_2 ist eine Zentralkollineation π_2 gegeben, die das Dreieck A'B'C' in das Dreieck A"B"C" abbildet. Die Verkettung $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi$ bildet somit das Dreieck ABC in das Dreieck A"B"C" ab. Ist $Q \in f$ ein Punkt in f, dann liegt auch $\pi_1(Q) = Q'$ in dem Projektionsstrahl $QZ_1 = f$ und $\pi_2(Q') = Q''$ in dem Projektionsstrahl $Q'Z_2 = f$, also ist f in der Tat eine Fixgerade der Verkettung $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi$, q.e.d. □

Bemerkung 2. Durch Dualisierung der Konstruktion erhält man ebenfalls die Figur in

Abb. 6. An Stelle der Fixgeraden f ist der Fixpunkt F gegeben. Man wählt in F zwei beliebige Achsen z_1 und z_2. Dann gibt es jeweils drei Schnittpunkte

$$\begin{array}{lll} A_1 = az_1 & B_1 = bz_1 & C_1 = cz_1 \\ A_2 = a''z_2 & B_2 = b''z_2 & C_2 = c''z_2 \end{array}$$

deren Verbindungsgeraden ein drittes Dreiseit $a' = A_1A_2$, $b' = B_1B_2$, $c' = C_1C_2$ liefern. Somit entstehen zwei Desargues-Figuren: Die Dreiseite abc und a'b'c' sind durch die Achse z_1 liniert und die Dreiseite a'b'c' und a"b"c" sind durch die Achse z_2 liniert. Zu jeder Desargues-Figur gehört ein Zentrum Z_1 bzw. Z_2, durch die die drei Verbindungsgeraden der sich jeweils entsprechenden Ecken der Dreiseite gehen.