

Skizze der polareuklidischen Geometrie

Peter Baum*

Inhaltsverzeichnis

1	Projektive Geometrie	2
1.1	Inzidenz und Grundgebilde	2
1.2	Elementarbewegungen	3
1.3	Pol-Polare Beziehung am Kreis	4
1.4	Involution	5
1.5	Dualitätsprinzip	6
2	Polareuklidische Geometrie	7
2.1	Polarität	7
2.2	Orthogonalität und Winkel	9
3	Die polareuklidische Geometrie in der Ebene	10
3.1	Strecke und Fächer	11
3.2	Parallelogramm und Zentrigramm	12
3.3	Mittelpunkt und Mittelstrahl	14
3.4	Die Bildkurven	15
3.5	Brennpunkt und Leitlinie	17
3.6	Koordinaten und das Doppelverhältnis	20
3.7	Koordinaten in der polareuklidischen Ebene	24
3.8	Abstand	24
3.9	Dreiecke und Dreiseite	27
3.10	Umkreis, Inkreis, Ankreis	34
3.11	Kreisgeometrie	36
3.12	Chordale	38
3.13	Orthogonale Kreisbüschel	39
3.14	Ähnlichkeitszentren und Ähnlichkeitslinien	46
3.15	Abbildungen	48
4	Ausblick	50

*p.baum@posteo.de am 13.08.2023 in der Fassung vom 14.11.2023

Diese Skizze hat zum Ziel, die Grundlagen der polareuklidische Geometrie, wie sie von LOCHER-ERNST in seinem 1940 in Zürich erschienenen Buch *Projektive Geometrie* angeregt wurde, zu erläutern.

1 Projektive Geometrie

1.1 Inzidenz und Grundgebilde

Die projektive Geometrie hat sich aus dem Anschauungsraum der euklidischen Geometrie entwickelt. In der gegenseitigen Lage der Grundelemente Punkt, Gerade und Ebene gibt es das anschauliche Phänomen der Inzidenz. Aus ihr ergeben sich sieben Grundgebilde:

Zu einer Geraden gehören unbegrenzt viele Punkte, die mit ihr inzidieren, sie bilden eine *Punktreihe*.
 Zu einer Geraden gehören unbegrenzt viele Ebenen, die mit ihr inzidieren, sie bilden ein *Ebenenbüschel*.

Zu einem Punkt gehören unbegrenzt viele Geraden, die mit ihm inzidieren, sie bilden ein *Geradenbündel*.
 Zu einer Ebene gehören unbegrenzt viele Geraden, die mit ihr inzidieren, sie bilden ein *Geradenfeld*.

Zu einem Punkt gehören unbegrenzt viele Ebenen, die mit ihm inzidieren, sie bilden ein *Ebenenbündel*.
 Zu einer Ebene gehören unbegrenzt viele Punkte, die mit ihr inzidieren, sie bilden ein *Punktfeld*.

Zu einer Ebene und einem in ihr liegenden Punkt gehören unbegrenzt viele Geraden, die sowohl mit dem Punkt als auch mit der Ebene inzidieren, sie bilden ein *Geradenbüschel*.

Wir stellen noch folgendes fest:

- Zwei Geraden eines Feldes haben entweder einen gemeinsamen Punkt oder eine gemeinsame Richtung.
- Zwei Geraden, die keine Ebene gemeinsam haben, sind windschief. Sie haben dann auch keinen Punkt gemeinsam.
- Zwei verschiedene gleichartige Grundelemente können nicht inzidieren.

Die Untersuchung der Inzidenz verschiedenartiger Grundelemente führt zunächst zur Einführung der *Fernelemente*, also den Geradenrichtungen als *Fernpunkte*, den Ebenenstellungen als *Ferngeraden* und der Gesamtheit der Fernpunkte und Ferngeraden als *Fernebene*.

Jedes Bündel von parallelen Geraden bestimmt genau einen Fernpunkt, und jedes Büschel von parallelen Ebenen bestimmt genau eine Ferngerade. Da zwei Ferngeraden stets genau einen gemeinsamen Fernpunkt haben, weil ihre Repräsentanten, die beiden Büschel von parallelen Ebenen, sich in lauter parallelen Geraden schneiden, hat die Gesamtheit der Ferngeraden und Fernpunkte die Struktur einer Ebene.

Hieraus ergeben sich nun folgende Urphänomene als Inzidenzaxiome des projektiven Raumes:

Zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade, die mit ihnen inzidiert.

Zwei Ebenen bestimmen genau eine Gerade, die mit ihnen inzidiert.

Drei Punkte, die nicht in derselben Punktreihe liegen, bestimmen genau eine Ebene, die mit ihnen inzidiert.

Drei Ebenen, die nicht in demselben Ebenenbüschel liegen, bestimmen genau einen Punkt, der mit ihnen inzidiert.

Ein Punkt und eine Gerade, die nicht inzidieren, bestimmen genau eine Ebene, die mit ihnen inzidiert.

Eine Ebene und eine Gerade, die nicht inzidieren, bestimmen genau einen Punkt, der mit ihnen inzidiert.

Die entsprechenden Inzidenzaxiome in einer projektiven Ebene lauten:

Zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade, die mit ihnen inzidiert.

Zwei Geraden bestimmen genau einen Punkt, der mit ihnen inzidiert.

Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit ihren Seiten abc und $a'b'c'$ so beschaffen sind, dass die drei Geraden AA' , BB' und CC' mit einem Punkt Z inzidieren, dann inzidieren auch die drei Punkte aa' , bb' und cc' mit einer Geraden z .

Das letzte Axiom fordert die Gültigkeit des Satzes von Desargues, der zwar aus den Inzidenzaxiomen des Raumes folgt, nicht aber aus den Inzidenzaxiomen der Ebene.

Bemerkung 1. Jede Gerade ist ein Repräsentant von genau einem Fernpunkt. Jede zu ihr parallele Gerade repräsentiert *denselben* Fernpunkt. Denn parallele Geraden haben eine gemeinsame Richtung, und es empfiehlt sich, dass man sich eine solche Richtung vorstellt, wenn von einem Fernpunkt die Rede ist.

Jede Ebene ist ein Repräsentant von genau einer Ferngeraden. Jede zu ihr parallele Ebene repräsentiert *dieselbe* Ferngerade. Denn parallele Ebenen haben eine gemeinsame Stellung, und es empfiehlt sich, dass man sich eine solche Stellung vorstellt, wenn von einer Ferngeraden die Rede ist.

1.2 Elementarbewegungen

Punkte, Geraden und Ebenen können sich in vielfältiger Weise im Raum bewegen. Es gibt aber für jedes dieser Grundelemente besonders einfach geordnete Bewegungen, die wir *Elementarbewegung* nennen:

Ein Punkt wandert in einer festen Geraden.

Eine Ebene dreht sich um eine feste Gerade.

Eine Gerade dreht sich in einer festen Ebene um einen festen Punkt.

Man kann sich die sieben Grundgebilde durch Elementarbewegungen erzeugt denken:¹

Die Elementarbewegung eines Punktes erzeugt eine Punktreihe mit der festen Geraden als Träger.

Die Elementarbewegung einer Ebene erzeugt ein Ebenenbüschel mit der festen Geraden als Träger.

Die Elementarbewegung einer Geraden erzeugt ein Geradenbüschel mit dem festen Punkt und der festen Ebene als Träger.

Die Elementarbewegung des Trägers einer Punktreihe erzeugt ein Punktfeld.

Die Elementarbewegung des Trägers eines Ebenenbüschels erzeugt ein Ebenenbündel.

Die Elementarbewegung des Trägerpunktes eines Geradenbüschels in einer Büschelgeraden erzeugt ein Geradenfeld.

Die Elementarbewegung der Trägerebene eines Geradenbüschels um eine Büschelgerade erzeugt ein Geradenbündel.

1.3 Pol-Polare Beziehung am Kreis

Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M . Er gliedert die Punkte der Ebene in äußere Punkte, Kreispunkte und innere Punkte, und die Geraden der Ebene in Sekanten, Tangenten und Passanten. Wir stellen fest:

Ein innerer Punkt inzidiert mit keiner Passante, keiner Tangente und beliebig vielen Sekanten.

Eine Passante inzidiert mit keinem inneren Punkt, keinem Kreispunkt und beliebig vielen äußeren Punkten.

Ein Kreispunkt inzidiert mit keiner Passante, genau einer Tangente und beliebig vielen Sekanten.

Eine Tangente inzidiert mit keinem inneren Punkt, genau einem Kreispunkt und beliebig vielen äußeren Punkten.

Ein äußerer Punkt inzidiert mit beliebig vielen Passanten, genau zwei Tangenten und beliebig vielen Sekanten.

Eine Sekante inzidiert mit beliebig vielen inneren Punkten, genau zwei Kreispunkten und beliebig vielen äußeren Punkten.

Diese Inzidenzbeziehungen gelten für jeden Kegelschnitt. Offenbar gibt es folgende Entsprechungen:

¹Diesen Gedanken hat schon FEDERIGO ENRIQUES (1871 – 1946) in seinen 1903 erschienenen *Vorlesungen über projektive Geometrie* (S. 7) formuliert.

innere Punkte	\longleftrightarrow	Passanten
Kreispunkte	\longleftrightarrow	Tangenten
äußere Punkte	\longleftrightarrow	Sekanten

Man kann sogar jedem Punkt genau eine Gerade zuordnen und umgekehrt:

Ist A ein äußerer Punkt, so gehen durch ihn genau zwei Tangenten mit den Berührungspunkten K_1 und K_2 . Die Sekante $a = K_1K_2$ ist dann durch A eindeutig bestimmt, sie heißt *Polare* von A, und A heißt *Pol* von a.

Die Sekante trifft die Gerade MA in einem inneren Punkt A'. Die durch A gehende Orthogonale zu MA ist dann die eindeutig bestimmte Polare a' von dem inneren Punkt A'.

Ist K ein Kreispunkt, so ist seine Tangente die eindeutig bestimmte Polare von K.

Der Hauptsatz der Polarentheorie lautet:

Satz. Wandert ein Punkt P auf einer Geraden g, so dreht sich seine Polare p um den Pol G von g.

Aus ihm folgt: Liegt ein Punkt A in der Polaren b eines Punktes B, so liegt B auch in der Polaren a von A. In diesem Fall heißen A und B *konjugierte Punkte* und a und b *konjugierte Geraden* in Bezug auf den Kreis.

Die Pol-Polare Beziehung gibt es offenbar bei jedem Kegelschnitt. Allerdings ist dort die Polare eines inneren Punktes bekanntlich anders definiert als oben beim Kreis notiert.

Nach dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck ATM in der Abb. 1 ist

$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = r^2$$

Die Zuordnung $A \leftrightarrow A'$ nennt man *Spiegelung* oder *Inversion am Kreis*. Ist k der Einheitskreis, so ist $r = 1$ und

$$\overline{MA} \cdot \overline{MA'} = 1$$

1.4 Involution

Ist k ein Kegelschnitt und g eine Passante oder Sekante von k und P ein Punkt in g, so trifft die Polare p von P in Bezug auf k die Gerade g in einem Punkt P'. Die Polare p' von P' geht dann nach dem Hauptsatz durch P. Dadurch ist in g eine umkehrbar eindeutige Zuordnung $P \longleftrightarrow P'$ definiert, also eine Involution (Abb. 2).

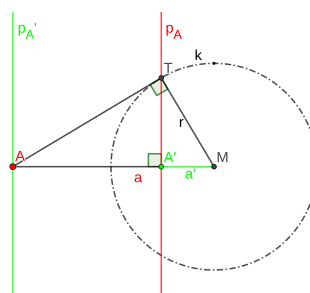


Abbildung 1: Pol-Polare

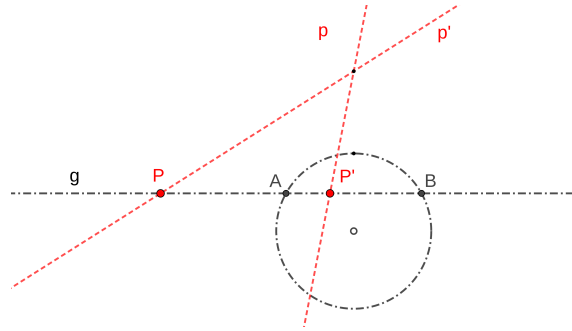


Abbildung 2: Involution

Bewegt sich P auf einer Sekante, so bewegt sich P' in entgegengesetzter Richtung und beide Punkte treffen sich in den Schnittpunkten A und B der Sekante mit dem Kegelschnitt, es gibt also die Fixpunkte $A' = A$ und $B' = B$ und die Involution heißt hyperbolisch.²

Bewegt sich P auf einer Passante, so bewegt sich P' in derselben Richtung, es gibt keine Fixpunkte und die Involution heißt elliptisch.³

1.5 Dualitätsprinzip

Die Darstellung der sieben Grundgebilde und den Inzidenzbeziehungen im Abschnitt 1.3 in zwei Textspalten ist einer der schönsten Gesetzmäßigkeiten in der Geometrie, dem *Dualitätsprinzip* geschuldet. Es folgt direkt aus den Inzidenzaxiomen der projektiven Geometrie und kann so formuliert werden:

Gilt in einem projektiven Raum ein Satz, der in den Grundbegriffen Punkt, Gerade und Ebene und der Inzidenz formuliert ist, so gilt auch der durch Vertauschen der Wörter Punkt und Ebene aus ihm sinngemäß entstehende duale Satz unter Beibehaltung des Wortes Gerade.

Gilt in einer projektiven Ebene ein Satz, der in den Grundbegriffen Punkt, Gerade und der Inzidenz formuliert ist, so gilt auch der durch Vertauschen der Wörter Punkt und Gerade aus ihm sinngemäß entstehende duale Satz.

In den folgenden Ausführungen wird oftmals zu einem Sachverhalt in einer linken Spalte der entsprechende duale Sachverhalt in der rechten Spalte formuliert. Wenn die linke Aussage stimmt, dann stimmt auf Grund des Dualitätsprinzip auch die duale rechte Aussage und muss nicht noch extra bewiesen werden.

²Die Bezeichnung hat ihren Grund in dem Umstand, dass die Ferngerade eine Sekante der Hyperbel ist.

Wandert ein Hyperbelpunkt P auf einem Hyperbelast in einen der Fernpunkte, so wird seine Polare eine Asymptote als Tangente und es ist $P' = P$ ein Fixpunkt.

³Weil die Ferngerade eine Passante der Ellipse ist.

Duale Grundgebilde sind

$$\begin{aligned} \text{Punktreihe} &\longleftrightarrow \text{Ebenenbüschel} \\ \text{Punktfeld} &\longleftrightarrow \text{Ebenenbündel} \\ \text{Geradenfeld} &\longleftrightarrow \text{Geradenbündel} \end{aligned}$$

und das Geradenbüschel ist zu sich selbst dual.

2 Polareuklidische Geometrie

Damit das Dualitätsprinzip im anschaulichen projektiven Raum ohne Einschränkung gilt, dürfen die Fernelemente keine Sonderstellung haben. Will man aber an ihrer Sonderstellung, die ja anschaulich vorhanden ist, festhalten, so kann die uneingeschränkte Gültigkeit des Dualitätsprinzips nur dann gerettet werden, wenn man zu den Fernelementen besondere duale Nahelemente einführt: Dual zu der Fernebene als Träger eines Feldes von Ferngeraden und Fernpunkten zeichnet man einen beliebigen im Endlichen liegenden Punkt als *Nahpunkt* aus. Dieser ist Träger eines Geradenbündels, den *Nahstrahlen*, und Träger eines Ebenenbündels, den *Nahebenen*. Somit hat man folgende duale Entsprechungen im Raum:

$$\begin{aligned} \text{Fernebene} &\longleftrightarrow \text{Nahpunkt} \\ \text{Ferngerade} &\longleftrightarrow \text{Nahstrahl} \\ \text{Fernpunkt} &\longleftrightarrow \text{Nahebene} \end{aligned}$$

Auf diesem Weg entsteht die Polareuklidische Geometrie (PEG). Diesen so mit den ausgezeichneten Nahelementen ergänzten projektiven Anschauungsraum nennen wir den *Polareuklidischen Raum*.

LOUIS LOCHER-ERNST (1906 – 1962) hat in seinem 1940 in Zürich erschienenen Buch *Projektive Geometrie* diesen Gedanken wohl als Erster aufgegriffen und in den letzten beiden Kapiteln auf 45 Seiten anfänglich bearbeitet. Er nannte den Nahpunkt den *absoluten Mittelpunkt*.

Es ist das Verdienst von IMMO DIENER, die PEG in seinem 2021 bei Springer Spectrum erschienenen Buch *Polareuklidische Geometrie* vertieft zu haben. Er erzeugt durch konsequente Anwendung des Dualitätsprinzips aus der euklidischen Geometrie (EG) eine dualeuklidische Geometrie (DEG). So entwickelt er in einer außerordentlich ausführlichen und elementar verständlichen Weise aus einem Begriff der EG (e-Begriff) einen dualen d-Begriff der DEG. Diese Unterscheidung in „e-Ding“ (es enthält keine Fernelemente) und das duale „d-Ding“ (es enthält keine Nahelemente) ist ein didaktischer Kniff und wird ab S. 66 seines Buches konsequent durchgeführt.

2.1 Polarität

In dieser Arbeit wird auf eine solche Unterscheidung verzichtet. Gleichwohl sind auch wir, wie schon LOCHER-ERNST und IMMO DIENER vielfach genötigt, für die dualen Sachverhalte neue Namen zu erfinden. Diese werden *kursiv* notiert.

Es ist zweckmäßig, folgende Bezeichnungen im Polareuklidischen Raum zu verabreden:

Definition: Mit den Worten *Punkt*, *Gerade* und *Ebene* bezeichnen wir nur solche Grundelemente, die weder Fernelemente noch Nahelemente sind. Den Nahpunkt bezeichnen wir stets mit N .

Das Dualitätsprinzip hängt eng zusammen mit einer besonderen projektiven Abbildung: der *Polarität*. Wir gehen davon aus, dass in dem polareuklidischen Raum, der neben den euklidischen Elementen Punkt, Gerade und Ebene sowohl die ausgezeichneten Fernelemente als auch die ausgezeichneten Nahelemente enthält, eine *Polarität* definiert ist, also eine involutorische projektive Abbildung, die unter Beibehaltung der Inzidenzen im Raum folgende Zuordnungen liefert:

$$\begin{array}{lll} \text{Nahpunkt} \leftrightarrow \text{Fernebene} & \text{Nahebene} \leftrightarrow \text{Fernpunkt} & \text{Nahstrahl} \leftrightarrow \text{Ferngerade} \\ \text{Punkt} \leftrightarrow \text{Ebene} & & \text{Gerade} \leftrightarrow \text{Gerade} \end{array}$$

In einer polareuklidischen Ebene liefert eine Polarität die Zuordnungen

$$\text{Nahpunkt} \leftrightarrow \text{Ferngerade} \quad \text{Punkt} \leftrightarrow \text{Gerade} \quad \text{Nahgerade} \leftrightarrow \text{Fernpunkt}$$

Beispiele für solche Polaritäten sind

- im Raum die Pol-Polare Beziehung an der Einheitskugel mit dem Nahpunkt als Mittelpunkt,
- in der Ebene die Pol-Polare Beziehung am Einheitskreis mit dem Nahpunkt als Mittelpunkt (siehe Abschnitt 1.3),
- in der Ebene die Pol-Polare Beziehung an einer Ellipse oder Hyperbel mit dem Nahpunkt als Mittelpunkt,
- in der Ebene die Pol-Polare Beziehung durch ein beliebiges Viereck $ABCD$ in allgemeiner Lage, dem ein beliebiges Vierseit mit den Polen a, b, c, d in allgemeiner Lage zugeordnet ist.

Bemerkung 2. Die Polarität an einem Kegelschnitt ordnet jeder Tangente ihren Berührungspunkt als Pol zu. Im Fall der Parabel ist der Pol der Ferngeraden der Fernpunkt der Parabelachse. Dieser kann als Fernpunkt kein Nahpunkt sein, daher scheidet die Polarität an einer Parabel in unserer Betrachtung aus.⁴

Zu irgend einer geometrischen Figur F im polareuklidischen Raum, die ja außer Punkten, Geraden und Ebenen auch Fernelemente und Nahelemente enthalten kann, gibt es vermöge einer Polarität stets eine eindeutig bestimmte Bildfigur F' .

Um den sprachlichen Umgang mit den Begriffen *dual* und *polar*, die oft synonym gebraucht werden, zu präzisieren, betrachten wir ein Beispiel:

⁴Dass der analog der Fernebene im Raum oder der Ferngerade in der Ebene ausgezeichnete absolute Mittelpunkt oder Nahpunkt kein Fernpunkt sein darf, ist mathematisch nicht zwingend. Man könnte also auch eine ebene Geometrie untersuchen, bei der die Polarität an einer Parabel zugrunde liegt und das Dualitätsgesetz gültig bleibt.

Es sei in der Ebene A irgend ein Punkt und B irgend ein Fernpunkt. Dann ist mit dem Nahpunkt N durch ABN ein Dreieck gegeben. Das duale Gebilde ist dann ein Dreieck mit einer Geraden a als Polare von A , einem Nahstrahl b als Polare von B und der Ferngeraden n als Polare von N . Jedes der beliebig vielen solcher Dreiecke ABN und jedes der beliebig vielen solcher Dreiecke abn sind dann duale Figuren im polareuklidischen Raum. Weitere Aussagen über ein Dreieck abn als duale Figur eines Dreiecks ABN können erst gemacht werden, wenn feststeht, welche Polarität zugrunde liegt.

Eine solche liefert zu dem Dreieck ABN ein eindeutig bestimmtes Dreieck abn , und dieses nennen wir die zu ABN *polare Figur* in Bezug auf die Polarität.

Wir stellen fest:

Jeder Nahstrahl inzidiert mit genau einem Fernpunkt.	Jeder Fernpunkt inzidiert mit genau einem Nahstrahl.
Jede Nahebene inzidiert mit genau einer Ferngeraden.	Jede Ferngerade inzidiert mit genau einer Nahebene.

2.2 Orthogonalität und Winkel

In der Geometrie gibt es das Phänomen des rechten Winkels oder der Orthogonalität. Wir betrachten die in einem Bündel versammelten Nahelemente. In der linken Spalte formulieren wir den Sachverhalt der Orthogonalität im Nahbündel, und in der rechten Spalte den dualen Sachverhalt in Bezug auf eine Polarität. Man sollte sich von der Richtigkeit der rechten Aussagen auch dadurch überzeugen, dass man sich jeweils Punkte, Geraden und Ebenen als Repräsentanten der Fernelemente vorstellt.

Zu jedem Nahstrahl gibt es genau eine orthogonale Nahebene und somit auch genau eine orthogonale Ferngerade.	Zu jeder Ferngeraden gibt es genau einen orthogonalen Fernpunkt und somit auch genau einen orthogonalen Nahstrahl.
Zu jeder Ebene oder Nahebene gibt es genau einen orthogonalen Nahstrahl und somit genau einen orthogonalen Fernpunkt.	Zu jedem Punkt oder Fernpunkt gibt es genau eine orthogonale Ferngerade und somit genau eine orthogonale Nahebene.
Zwei Ebenen oder Nahebenen sind orthogonal, wenn ihre Ferngeraden orthogonal sind.	Zwei Punkte oder Fernpunkte sind orthogonal, wenn ihre Nahstrahlen orthogonal sind.

Die Orthogonalität zeichnet nun

- in jeder Ebene E des polareuklidischen Raumes einen besonderen Punkt O ihres Punktfeldes aus, nämlich den Schnittpunkt der Ebene mit dem zu ihr orthogonalen Nahstrahl,
- in jeder Geraden g des polareuklidischen Raumes einen besonderen Punkt O ihrer Punktreihe aus, nämlich den Schnittpunkt der Geraden mit der zu ihr orthogonalen Nahebene.

Wir nennen O den *Orthopunkt* der Ebene E bzw. der Geraden g und E die *Orthoebene* des Punktes O .

Analog hierzu gibt es in jeder Geraden g der polareuklidischen Ebene einen Orthopunkt, nämlich den Schnittpunkt des zu g orthogonalen Nahstrahls mit g .

Winkel

Zwei Nahstrahlen oder zwei zu ihnen parallele Geraden bilden stets vier Winkel. Jeder Winkel hat zwei Nebenwinkel und einen gleich großen Scheitelwinkel. Sind die Nahstrahlen orthogonal, so sind alle vier Winkel rechte Winkel.

Wir definieren:

- Die Winkel zweier Punkte oder Fernpunkte sind die Winkel ihrer Nahstrahlen.
- Die Winkel zweier Ebenen oder Nahebenen sind die Winkel ihrer orthogonalen Nahstrahlen.
- Die Winkel zweier Ferngeraden sind die Winkel ihrer orthogonalen Nahstrahlen.

Wir stellen fest:

Zu den Winkeln zweier Nahstrahlen a und b gehören zwei Nahstrahlen w und w' als Winkelhalbierende. Diese sind orthogonal. Zu den Winkeln zweier Ferngeraden a und b gehören zwei Ferngeraden w und w' als Winkelhalbierende. Diese sind orthogonal.

Bezeichnungen in der polareuklidischen Ebene:

Sind A, B, Z drei Punkte, so bezeichnet man mit $\sphericalangle AZB$ denjenigen Winkel der Geraden AZ und BZ , der von den Strecken $s_a = \overline{AZ}$ und $s_b = \overline{BZ}$ eingeschlossen wird, und es ist stets $0 \leq \sphericalangle AZB \leq 180^\circ$. Sind a, b, z drei Geraden, so bezeichnen wir mit $\sphericalangle azb$ denjenigen Winkel der Punkte $S_a = az$ und $S_b = bz$, der von den Strecken $\overline{NS_a}$ und $\overline{NS_b}$ eingeschlossen wird, und es ist stets $0 \leq \sphericalangle azb \leq 180^\circ$.

3 Die polareuklidische Geometrie in der Ebene

In der projektiven Ebene sind Punkt und Gerade zueinander duale Elemente. Wir ergänzen auch hier die Fernelemente der Ebene durch einen beliebigen ausgezeichneten Punkt als Nahpunkt, den Träger des Nahstrahlenbüschels. Die Polarität am Einheitskreis k_e mit dem Nahpunkt N als Mittelpunkt liefert

- zu jedem Punkt der Ebene genau eine Gerade und umgekehrt,
- zu jedem Fernpunkt der Ebene genau eine Nahgerade und umgekehrt,
- zu der Ferngerade den Nahpunkt und umgekehrt.

Die Sachverhalte der Orthogonalität sind folgende:

Zu jedem Nahstrahl gibt es genau einen orthogonalen Nahstrahl.

Zu jeder Geraden gibt es genau einen orthogonalen Nahstrahl.

Zu jedem Fernpunkt gibt es genau einen orthogonalen Fernpunkt.

Zu jedem Punkt gibt es genau einen orthogonalen Fernpunkt.

Für die Winkel gilt entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 2.2:

Zu den Winkeln zweier Nahstrahlen a und b gehören zwei Nahstrahlen w und w' als Winkelhalbierende. Diese sind orthogonal. Die Winkel zweier Punkte sind die Winkel ihrer Nahstrahlen.

Zu den Winkeln zweier Fernpunkte A und B gehören zwei Fernpunkte W und W' als Winkelhalbierende. Diese sind orthogonal. Die Winkel zweier Geraden sind die Winkel ihrer Fernpunkte.

Definition. Eine Polarität π in der Ebene ist winkeltreu, wenn die Winkel zweier Geraden a und b ebenso groß sind wie die Winkel ihrer Pole $A = \pi(a)$ und $B = \pi(b)$.

Satz. Die Polarität am Einheitskreis k_e ist winkeltreu.

Beweis. Bei der Polarität am Einheitskreis ist der Nahstrahl des Pols A einer Geraden a stets orthogonal zu a . Somit stimmen die Winkel zweier Geraden a und b mit den Winkeln ihrer Pole überein. Hieraus folgt insbesondere: \square

Satz. Die Orthogonalität ist in Bezug auf die Polarität am Einheitskreis eine Invariante.

Bemerkung 3. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Polarität an einer Ellipse oder Hyperbel nicht winkeltreu ist. Aus diesem Grunde beschränken wir uns in dieser Skizze auf die Polarität am Einheitskreis.

3.1 Strecke und Fächer

Zwei Punkte einer Geraden zerlegen diese in zwei Teile, also zwei Segmente einer Punktreihe. Entsprechend zerlegen zwei Geraden eines Geradenbüschels dieses in zwei Teile, also zwei Segmente des Geradenbüschels.

Ist die Gerade g der Träger einer Punktreihe und G_∞ ihr Fernpunkt und sind $A \in g$ und $B \in g$ zwei Punkte von g , dann wird die Punktreihe durch A und B in zwei Segmente zerlegt. Dasjenige Segment, das G_∞ nicht enthält, nennen wir die Strecke \overline{AB} .

Ist der Punkt G der Träger eines Geradenbüschels und $g_0 = GN$ sein Nahstrahl und sind $a \in G$ und $b \in G$ zwei Büschelgeraden von G , dann wird das Geradenbüschel durch a und b in zwei Segmente zerlegt. Dasjenige Segment, das g_0 nicht enthält, nennen wir den Fächer \overline{ab} .

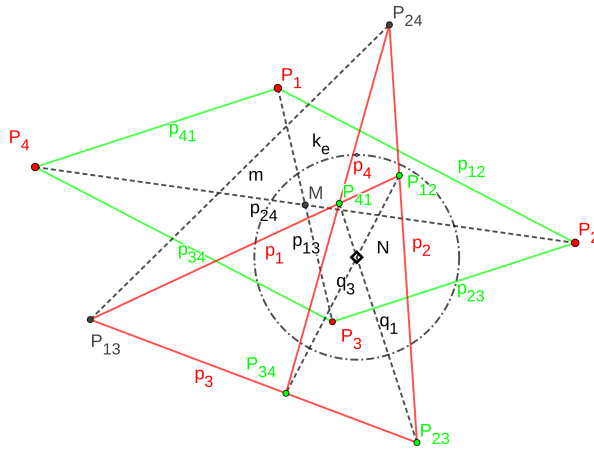


Abbildung 3: Parallelogramm und Zentrigramm

3.2 Parallelogramm und Zentrigramm

Zwei Geraden p_1 und p_2 sind *parallel*, wenn ihr gemeinsamer Punkt $S = p_1p_2$ ein Fernpunkt ist.

Es sei $P_1P_2P_3P_4$ Viereck mit den Seiten $p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{41}$, den Diagonalen p_{13}, p_{24} und dem Nebendreieck $Q_1 = p_{41}p_{23}$, $Q_2 = p_{24}p_{13}$ und $Q_3 = p_{34}p_{12}$.

Das Viereck ist ein Parallelogramm, falls Q_1 und Q_3 Fernpunkte sind.

Das Parallelogramm ist ein Rechteck, falls p_{12} und p_{23} orthogonal sind.

Das Rechteck ist ein Quadrat, falls auch p_{13} und p_{24} orthogonal sind.

Zwei Punkte P_1 und P_2 sind *zentriert*, wenn ihre gemeinsame Gerade $s = P_1P_2$ ein Nahstrahl ist.

Es sei $p_1p_2p_3p_4$ ein Vierseit mit den Ecken $P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41}$, den *Diapunkten* P_{13}, P_{24} und dem Nebendreieck $q_1 = P_{41}P_{23}$, $q_2 = P_{24}P_{13}$ und $q_3 = P_{34}P_{12}$.

Das Vierseit ist ein *Zentrigramm*, falls q_1 und q_3 Nahstrahlen sind.

Das Zentrigramm ist ein *Rechtseit*, falls P_{12} und P_{23} orthogonal sind.

Das Rechtseit ist ein *Polarquadrat*, falls auch P_{13} und P_{24} orthogonal sind.

In Abb. 3 sind die Geraden p_{12}, p_{34} und p_{23}, p_{41} jeweils parallel, die beiden Punkte $p_{12}p_{34} = Q_3$ und $p_{23}p_{41} = Q_1$ also Fernpunkte und $Q_2 = M$ der Mittelpunkt. Daher sind die Geraden $q_3 = P_{12}P_{34}$ und $q_1 = P_{23}P_{41}$ Nahstrahlen.

In Abb. 4 sind außerdem noch die Fernpunkte Q_1 und Q_3 orthogonal, d.h. auch die Nahstrahlen q_1 und q_3 sind orthogonal.

In Abb. 5 sind außerdem noch die Diagonalen p_{13} und p_{24} orthogonal, also auch die Punkte P_{13} und P_{24} .

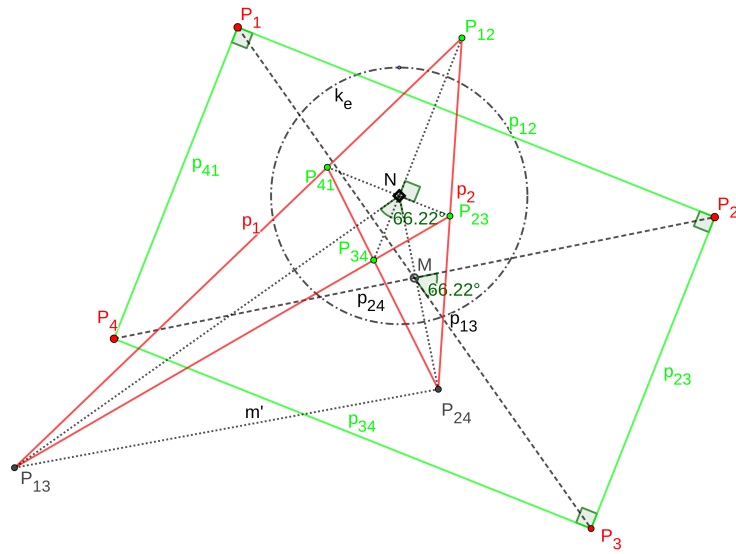


Abbildung 4: Rechteck und Rechtseit

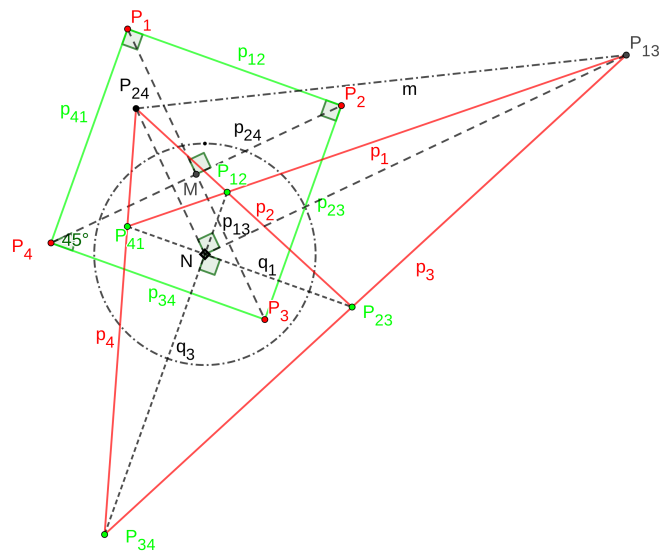


Abbildung 5: Quadrat und Polarquadrat

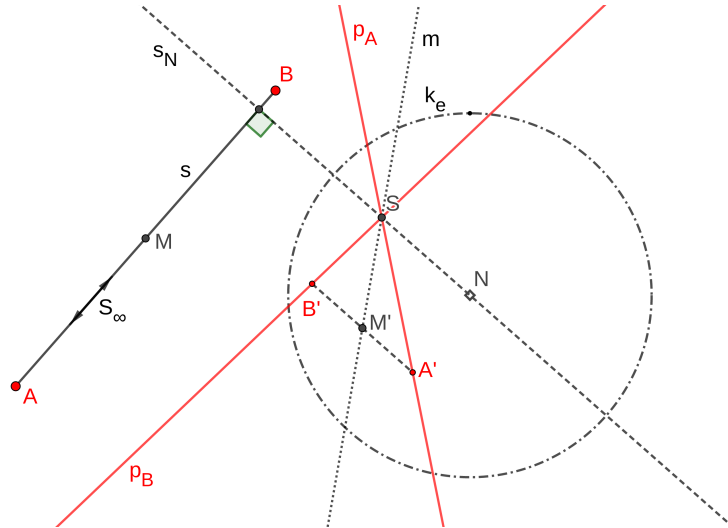


Abbildung 6: Mittelpunkt und Mittelstrahl

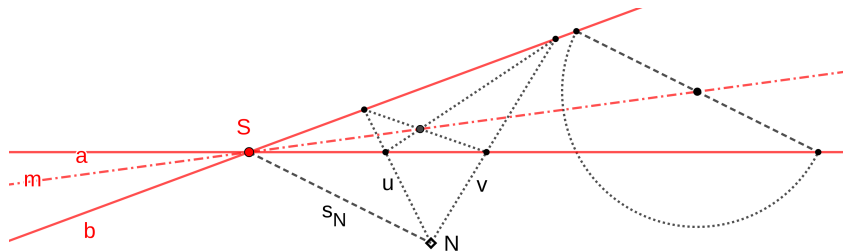


Abbildung 7: Mittelstrahl zweier Geraden

3.3 Mittelpunkt und Mittelstrahl

In Abb. 6 wird eine Gerade s mit zwei Punkten A und B und dem Mittelpunkt M der Strecke \overline{AB} durch die Polarität am Einheitskreis k_e abgebildet. Der Mittelpunkt von k_e sei der Nahpunkt N . Die duale Figur besteht dann aus dem Pol S von s und den Polaren p_A und p_B von A und B und der Polaren m von M . Die Polare des Fernpunktes S_∞ von s ist der mit S inzidierende Nahstrahl s_N , der wegen der Pol-Polare Beziehung orthogonal zu s verläuft.

Da das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Punktreihe sich bei projektiven Abbildungen nicht ändert, wird ein harmonischer Punktwurf durch die Polarität in einen harmonischen Geradenwurf abgebildet. Es ist also $DV(p_A p_B s_N m) = DV(ABS_\infty M) = -1$ und die zu p_A, p_B, s_N vierte harmonische Gerade des Geradenbüschels (S) nennen wir den *Mittelstrahl* von p_A und p_B . Dieser kann durch eine Parallele zum Nahstrahl s_N konstruiert werden, die die Polaren p_A und p_B in den Punkten A' und B' und den Mittelstrahl $m = SM'$ im Mittelpunkt M' der Strecke $\overline{A'B'}$ trifft. Eine weitere Konstruktion

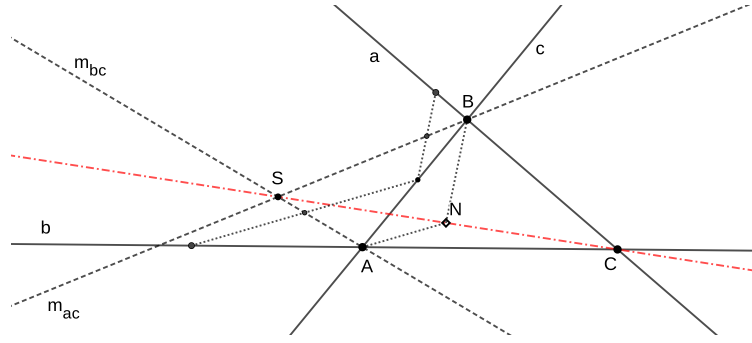


Abbildung 8: S und C sind zentriert

ergibt sich mit zwei beliebigen durch N gehenden Geraden u und v gemäß Abb. 7.

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und den Mittelpunkten M_{AC} und M_{BC} . Dann sind die Geraden $s = M_{AC}M_{BC}$ und c parallel.

Gegeben ist ein Dreieck abc mit den Ecken A, B, C und den Mittelstrahlen m_{ac} und m_{bc} . Dann sind die Punkte $S = m_{ac}m_{bc}$ und C zentriert (Abb. 8).

3.4 Die Bildkurven

Bekanntlich sind die Bildkurven von Kegelschnitten in Bezug auf projektive Abbildungen, insbesondere auf Polaritäten, wieder Kegelschnitte. Dabei ist zu beachten, dass bei einer Polarität das Bild eines Kurvenpunktes eine Tangente der Bildkurve und das Bild einer Kurventangente ein Punkt der Bildkurve ist. Ein Kurvenelement, bestehend aus einem Kurvenpunkt mit seiner Tangente, wird in ein Kurvenelement der Bildkurve abgebildet. Ob es sich bei der Bildkurve um eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel handelt, hängt von der Lage des Nahpunktes in Bezug auf den Kegelschnitt ab:

- Ist der Nahpunkt ein innerer Punkt, so ist kein Nahstrahl eine Tangente. Die Pole der Tangenten sind also keine Fernpunkte und das Bild des Kegelschnitts ist eine Ellipse oder ein Kreis.
- Ist der Nahpunkt ein Punkt des Kegelschnitts, so ist seine Tangente ein Nahstrahl und deren Pol ein Fernpunkt. Das Bild des Kegelschnitts ist also eine Parabel.
- Ist der Nahpunkt ein äußerer Punkt des Kegelschnitts, so gehen durch ihn zwei Tangenten als Nahstrahlen, deren Pole sind also Fernpunkte und das Bild ist eine Hyperbel.

Wir untersuchen nun die Bildkurve eines Kreises.

Der Nahpunkt ist stets ein Brennpunkt und die Polare des Mittelpunktes stets die zugehörige Leitlinie der Bildkurve. Dies wird im folgenden Abschnitt 3.5 am Beispiel der Ellipse gezeigt.

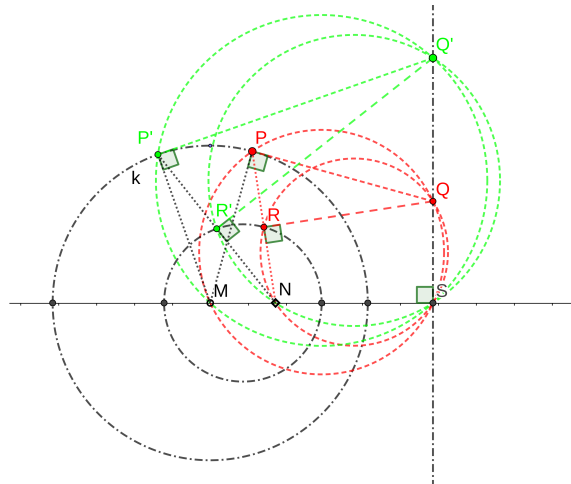


Abbildung 9: Thaleskreise

Bevor wir auf die Bildkurve eingehen, beweisen wir noch den

Satz. *Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und einem beliebigen Kreispunkt P . Es sei $N \neq M$ ein beliebiger Punkt. Die Tangente p von P schneidet die Mittelsenkrechte von PN in einem Punkt Q . Wandert nun P auf dem Kreis k , so wandert auch der Mittelpunkt R der Strecke PN auf einem festen Kreis und der Schnittpunkt Q wandert auf einer festen Orthogonalen zur Geraden MN (Abb. 9).*

Beweis. Es sei S der Schnittpunkt der durch Q gehenden Orthogonalen mit der Geraden MN . Dann ist der Kreis mit dem Durchmesser MQ ein Thaleskreis der Punkte P und S , und der Kreis mit dem Durchmesser NQ ein Thaleskreis der Punkte R und S .

Ist nun Q' ein beliebiger Punkt auf der Orthogonalen QS , dann sind die Kreise mit den Durchmessern MQ' und NQ' ebenfalls Thaleskreise der Punkte S und P' bzw. S und R' , so dass Q' ebenfalls der Schnittpunkt der Tangente von P' mit der Mittelsenkrechte von $P'N$ ist. \square

In der Abb. 10 wird ein Kreis in eine Ellipse abgebildet, weil der Nahpunkt im Inneren des Kreises liegt.

Gegeben ist ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und der Nahpunkt N .

Es sei P ein Punkt von k und p' seine Tangente. R sei der Mittelpunkt von P und N .

Der Punkt Q sei der Schnittpunkt von p' mit der durch R gehenden Orthogonalen h des Nahstrahls von P .

Gegeben sei ein Kegelschnitt k mit einer Leitlinie m und dem zugehörigen Brennpunkt N .

Es sei p eine Tangente von k und P' sein Berührungspunkt. r sei der Mittelstrahl von p und der Ferngeraden.

Die Gerade q sei die Verbindungsgerade von P' mit dem in r liegenden orthogonalen Punkt H des Fernpunktes von p .

Die durch Q gehende zu $a = MN$ orthogonale Gerade sei n' . Der Punkt Q' sei der Schnittpunkt von a und n' .

Im gleichschenkligen Dreieck PQN ist der Winkel zwischen P und Q gleich dem Winkel zwischen p' und dem Nahstrahl $b = PN$ (Abb. 10).

Der in q liegende zum Fernpunkt $A = mn$ von m orthogonale Punkt sei N' . Die Gerade q' sei die Verbindungsgerade von A und N' .

Im Dreieck pqn ist der Winkel zwischen p und q gleich dem Winkel zwischen P' und dem Fernpunkt $B = pn$ von p (Abb. 10).

Bemerkung 4. In der vorangehenden rechten Spalte ist n die Polare von N , also die Ferngerade, d.h. A ist der Fernpunkt der Leitlinie m und B ist der Fernpunkt der Tangente p . Es zeigt sich, dass N' der zweite Brennpunkt ist und $P'N$ und $P'N'$ die beiden Brennstrahlen des Kegelschnitts, deren Winkel von der Tangente p halbiert wird.

Wir setzen bei den folgenden Betrachtungen stets voraus, dass bei den dualen Sätzen, in denen ein Kegelschnitt als Bild eines Kreises vorkommt, der Nahpunkt sich in einem der Brennpunkte befindet.

3.5 Brennpunkt und Leitlinie

Bekanntlich hat eine Ellipse und eine Hyperbel zwei Brennpunkte. Die Polaren der Brennpunkte in Bezug auf den jeweiligen Kegelschnitt sind die Leitlinien. Diese haben folgende Eigenschaft: Ist F ein Brennpunkt und l_F seine Leitlinie und P ein beliebiger Kurvenpunkt mit dem Brennstrahl $\overline{PF} = r$ und dem Abstand $\overline{Pl_F} = d$ zur Leitlinie, so ist das Verhältnis

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

eine Konstante, die *numerische Exzentrizität*. Für eine Hyperbel ist $\varepsilon > 1$, für eine Ellipse ist $\varepsilon < 1$ und für eine Parabel ist $\varepsilon = 1$. Bei einer Parabel ist der zweite Brennpunkt der Fernpunkt der Parabelachse. Bei einem Kreis fallen beide Brennpunkte in dem Mittelpunkt zusammen, die Leitlinie, seine Polare, ist die Ferngerade und es ist $\varepsilon = 0$.

Aus dieser Eigenschaft ergibt sich folgende einheitliche Konstruktion für alle vier Kegelschnitte:⁵

In Abb. 11 sei t eine Gerade, welche die y -Achse in T und die x -Achse in L unter dem Steigungswinkel φ schneidet. Die durch L gehende Parallele zur y -Achse sei die Leitlinie. Eine beliebige Parallele zur y -Achse schneidet die x -Achse im Punkt Q und die Gerade t im Punkt R . Der Kreis um den Ursprung F mit dem Radius $r = \overline{QR}$ trifft die Gerade QR in den Kurvenpunkten P und P' .

Offenbar ist im rechtwinkligen Dreieck LQR

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QL}} = \tan \varphi$$

⁵P. Baum: Eine einfache Kontruktion der Kegelschnitte. Mathematisch-Physikalische Korrespondenz Nr. 131, Weihnachten 1983

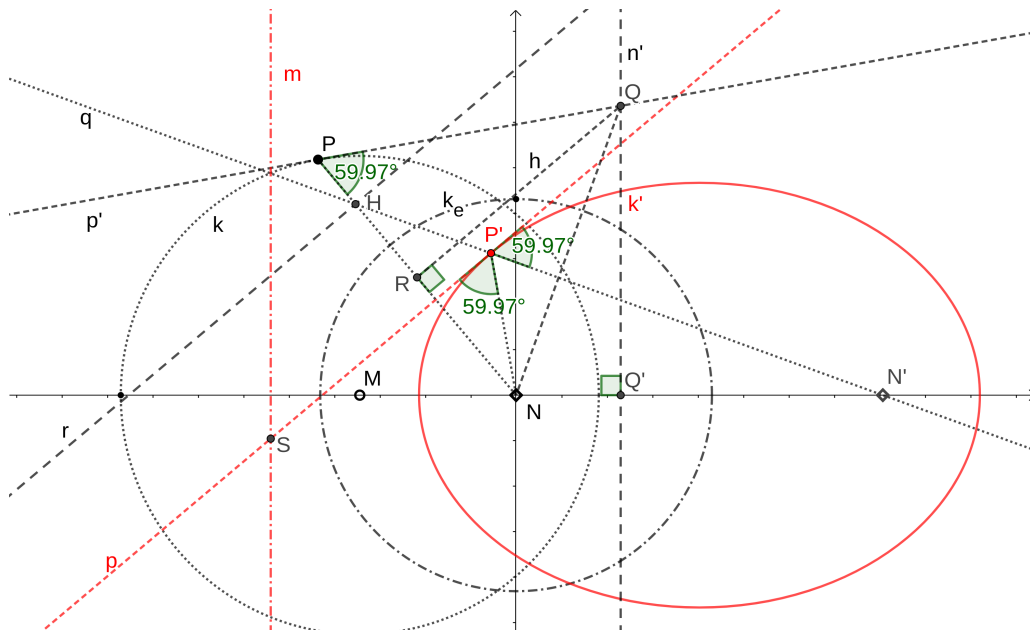


Abbildung 10: Kreis \longleftrightarrow Ellipse

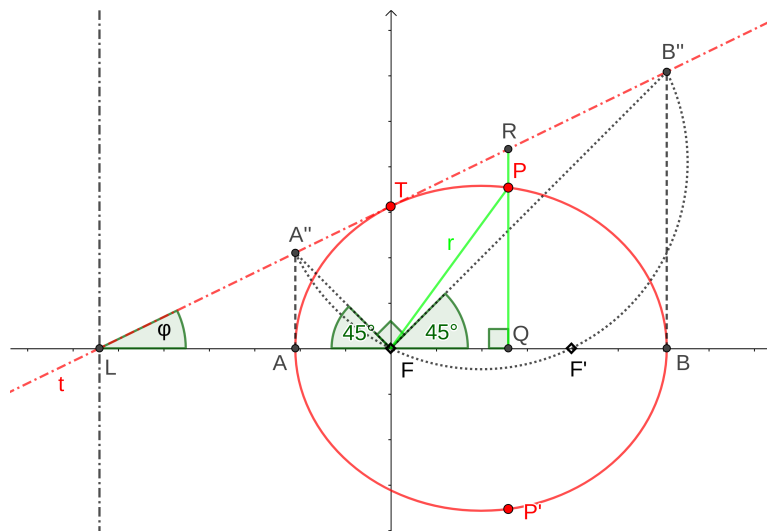


Abbildung 11: Konstruktion Ellipse

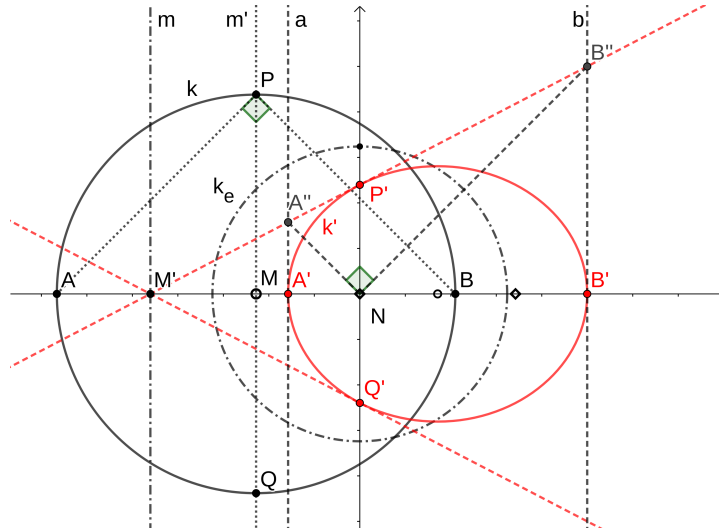


Abbildung 13: Brennpunkt und Leitlinie

Satz. Ist k' die Bildkurve eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M bezüglich einer Polarität am Einheitskreis k_e mit dem Nahpunkt $N \neq M$ als Mittelpunkt, so ist der Nahpunkt stets ein Brennpunkt von k' , also der Brennpunkt einer Parabel oder Ellipse oder Hyperbel, und die Polare m von M ist eine Leitlinie der Bildkurve. Ist $M = N$, so ist auch die Bildkurve k' ein zu k konzentrischer Kreis.

Beweis. In der Abb. 13 ist der Einheitskreis k_e mit dem Nahpunkt N als Mittelpunkt gezeichnet, und ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und den beiden Diametralpunkten A und B auf der Geraden MN . Die Polarität von k_e bildet den Kreis k in eine Ellipse ab, da der Nahpunkt N im Inneren von k liegt. Die Polaren a und b von A und B treffen die Gerade MN orthogonal in den Scheitelpunkten A' und B' der Ellipse.

Die durch M gehende Orthogonale zur Geraden MN trifft den Kreis k in zwei Diametralpunkten P und Q . Da die Geraden AP und BQ orthogonal sind, sind auch ihre Pole A'' und B'' orthogonal. Somit sind die Nahstrahlen NA'' und NB'' orthogonal und N ist ein Brennpunkt der Ellipse.

Es sei m die Polare von M und M' der auf m liegende Pol von PQ . Dann treffen sich die Polaren von P und Q als Ellipsentangenten mit den Berührungspunkten P' und Q' in M' . Das bedeutet aber, dass m die Polare des Brennpunktes N in Bezug auf die Ellipse ist, also in der Tat eine Leitlinie der Ellipse. \square

3.6 Koordinaten und das Doppelverhältnis

In der Abb. 14 ist die x -Achse dargestellt mit dem Ursprung A . Der Punkt P hat die Koordinate x und der Punkt B hat die Koordinate $x_B = 12$. Unter jeden Gitterpunkt P

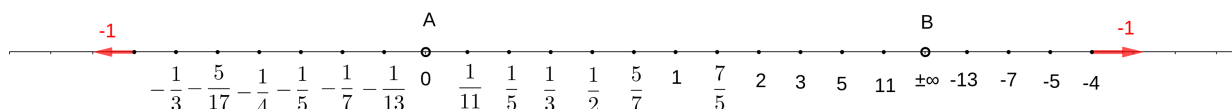


Abbildung 14: Verhältnisskala

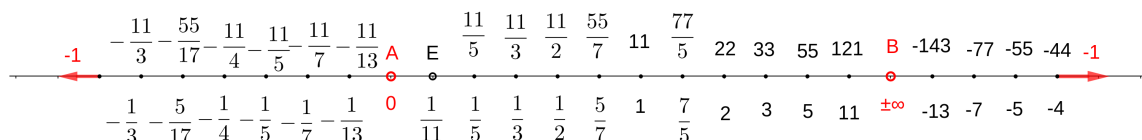


Abbildung 15: Doppelverhältnis

ist das Verhältnis

$$\lambda_P = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{x}{12-x}$$

notiert. Es sind die Verhältniskoordinaten des Punktes P in Bezug auf die Strecke \overline{AB} . Sie sind invariant gegenüber affinen Abbildungen, bei denen ja die Ferngerade eine Fixgerade ist. Interessant ist, dass der Fernpunkt der x-Achse sowohl bei Annäherung nach links als auch bei Annäherung nach rechts die Verhältniskoordinate -1 erhält, weil eben eine Gerade nur *einen* Fernpunkt hat.

Ist E ein weiterer Punkt auf der x-Achse und ist $\lambda_E = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$ seine Verhältniskoordinate in Bezug auf dieselbe Strecke \overline{AB} , so ist $DV(ABPE) = \lambda_P : \lambda_E$ das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, P, E in Bezug auf die Strecke \overline{AB} . Das Doppelverhältnis ist invariant gegenüber projektiven Abbildungen, insbesondere gegenüber Polaritäten.

In der Abbildung 15 ist oberhalb der x-Achse das Doppelverhältnis

$$\begin{aligned} DV(ABPE) &= \lambda_P : \lambda_E \\ DV(ABPE) &= \frac{x}{12-x} : \frac{1}{12-1} \\ DV(ABPE) &= \frac{11x}{12-x} \end{aligned}$$

für die äquidistanten Gitterpunkte P mit $x_E = 1$ notiert.

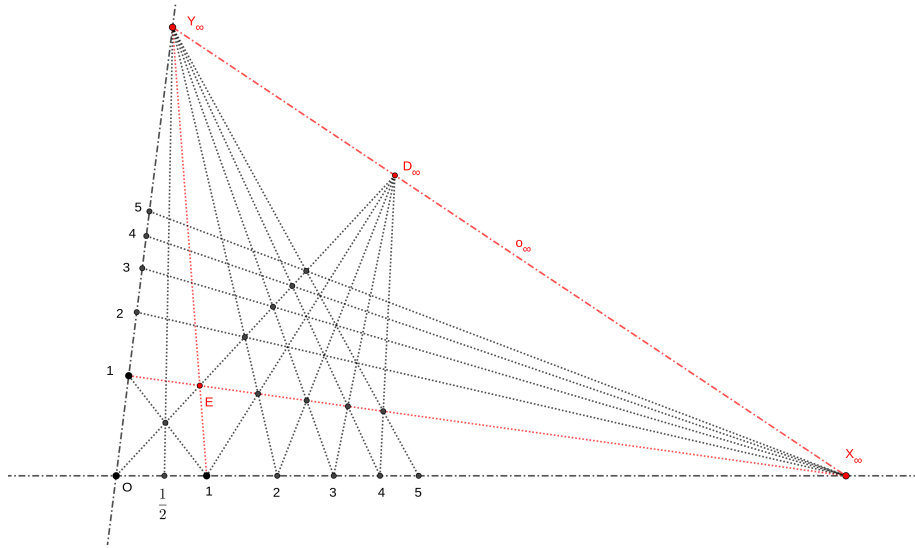


Abbildung 16: Projektive Skala

Allgemein ist

$$DV(ABPE) = \frac{x}{x_B - x} : \frac{1}{x_B - 1}$$

$$DV(ABPE) = x \frac{(x_B - 1)}{x_B - x}$$

$$DV(ABPE) = x \frac{1 - \frac{1}{x_B}}{1 - \frac{x}{x_B}}$$

Für $x_B \rightarrow \infty$ wird B zum Fernpunkt der x-Achse und das Doppelverhältnis $DV(ABPE) = x$ liefert die übliche x-Koordinate von P im kartesischen Koordinatensystem.

Abb. 16 enthält eine projektive Abbildung des Koordinatengitters eines kartesischen Koordinatensystems als Teil eines Möbiusnetzes. Punkt O ist der Ursprung, X_∞ das Bild des Fernpunktes der x-Achse und Y_∞ das Bild des Fernpunktes der y-Achse. Die Zahlen auf den Achsen sind die Doppelverhältnisse $DV(OX_\infty PE_x)$ bzw. $DV(OY_\infty PE_y)$ der Punkte auf den Achsen, wenn E_x bzw. E_y die Einheitspunkte auf den Achsen sind.

Das Doppelverhältnis

$$\lambda = DV(OX_\infty PE_x)$$

$$\lambda = \frac{\overline{OP}}{\overline{PX_\infty}} : \frac{\overline{OE}}{\overline{EX_\infty}}$$

liefert auf der x-Achse die Maßzahlen der projektiven Koordinaten des Punktes P vom Punkt O aus gemessen. Vertauscht man die Grundpunkte O und X_∞ der Bezugsstrecke, so erhält man die Koordinaten des Punktes P von X_∞ aus gemessen, die sogenannten *Fernkoordinaten* von P, weil X_∞ das Bild eines Fernpunktes ist.

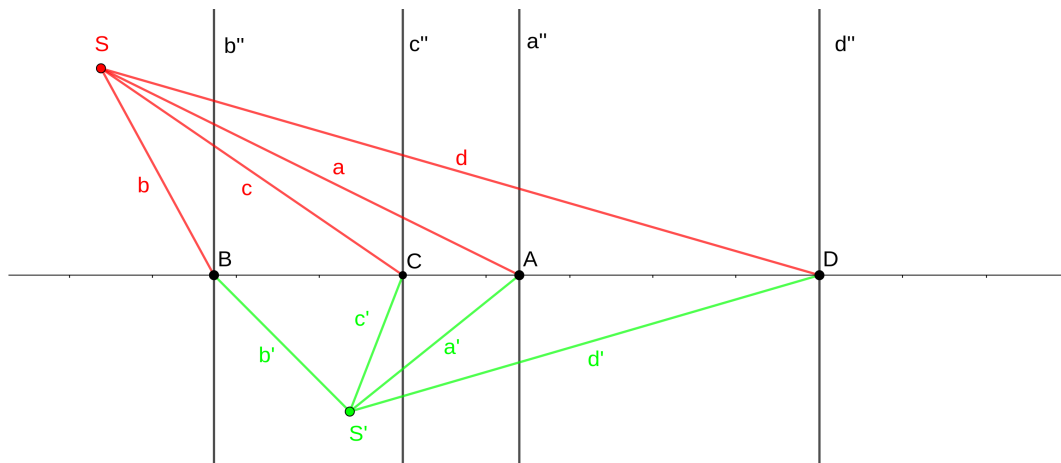


Abbildung 17: Doppelverhältnis von Geraden

Es ist nun

$$\begin{aligned}
 DV(X_\infty O P E_x) &= \frac{\overline{X_\infty P}}{\overline{PO}} : \frac{\overline{X_\infty E}}{\overline{EO}} \\
 DV(X_\infty O P E_x) &= \frac{\overline{P X_\infty}}{\overline{OP}} : \frac{\overline{E X_\infty}}{\overline{OE}} \\
 DV(X_\infty O P E_x) &= \frac{\overline{OE}}{\overline{E X_\infty}} : \frac{\overline{OP}}{\overline{P X_\infty}} \\
 DV(X_\infty O P E_x) &= \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

Bekanntlich ist das Doppelverhältnis von vier Geraden eines Geradenbüschels gleich dem Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte dieser Büschelgeraden mit irgend einer Geraden, die nicht dem Büschel angehört. In Abb. 17 sind drei Geradenbüschel mit jeweils vier Geraden dargestellt, deren Doppelverhältnisse identisch sind:

$$DV(ABCD) = DV(abcd) = DV(a'b'c'd') = DV(a''b''c''d'')$$

Zwei Geraden a und b schließen die Winkel α und $180^\circ - \alpha$ miteinander ein. Wegen $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ ist $\sin(ab)$ eindeutig bestimmt. Bekanntlich ist dann in einem halben orientierten Geradenbüschel $(ba) = -(ab)$ und mit einem Punkt S als Träger

$$DV(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)}$$

auch dem Vorzeichen nach eindeutig bestimmt.

Analog den Koordinaten von Punkten in einer Punktreihe können wir auch Koordinaten von Geraden in einem Geradenbüschel definieren. Sind n, u, a und e vier Geraden eines Büschels, so ist

$$\lambda_a = DV(nuae)$$

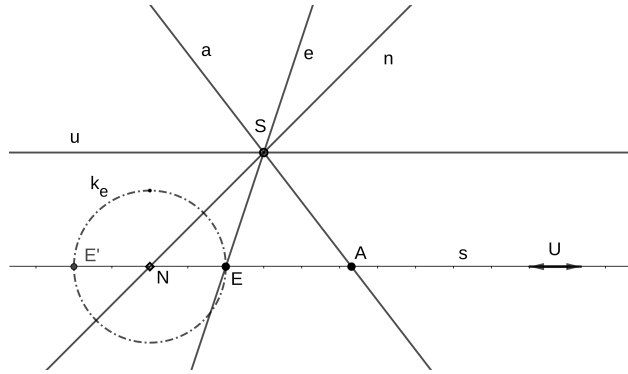


Abbildung 18: Koordinaten

die Koordinate der Gerade a in Bezug auf die Grundgeraden n und u und der Einheitsgeraden e .

Bemerkung 5. In der Abb. 16 entsteht das Möbiusnetz durch die Festlegung der vier Punkte O , E , X_∞ und Y_∞ und damit der rationalen Zahlen auf den Geraden OX_∞ und OY_∞ , unabhängig von einer starren Länge. Somit kann man auch unabhängig von einem auf dem gewöhnlichen Abstand beruhendem Doppelverhältnis Koordinaten einführen.

3.7 Koordinaten in der polareuklidischen Ebene

Auf Grund der Darstellungen im vorigen Abschnitt können wir nun folgende Koordinaten von Punkten und Geraden definieren:

Definition. Es sei k_e der Einheitskreis mit dem Nahpunkt als Mittelpunkt und dem Einheitspunkt E . Es sei A irgendein Punkt in dem Nahstrahl $s = NE$ und U der Fernpunkt von s . Dann ist $\lambda_A = DV(NUAE)$ die Nahkoordinate des Punktes A und $\frac{1}{\lambda_A} = DV(UNAE)$ die Fernkoordinate des Punktes A in der Punktreihe (s) .

Ist nun irgendein Punkt S der Träger eines Strahlenbüschels mit den Geraden $n = NS$, $e = ES$, $u = US$ und $a = AS$, so ist $\lambda_a = DV(nuae)$ die Nahkoordinate der Gerade a und $\frac{1}{\lambda_a} = DV(unae)$ die Fernkoordinate der Gerade a im Geradenbüschel (S) . Die Gerade u ist dann als Orthogonale zu n im Trägerpunkt S eindeutig bestimmt.

Bemerkung 6. Sind E und E' die Schnittpunkte eines Nahstrahls mit dem Einheitskreises, dann sind die Koordinaten durch die Angabe $\overline{NE} = 1$ gerichtet und die Gerade hat eine Orientierung oder einen Durchlaufungssinn. So ist z.B. $\overline{EN} = -1$ und $\overline{NE'} = -1$ und der Abstand $\overline{E'E}$ ist $\overline{E'E} = \overline{NE} - \overline{NE'} = 1 - (-1) = 2$.

3.8 Abstand

Durch den Einheitskreis ist auf jeder Geraden der Ebene eine Maßeinheit gegeben, so dass jeder gerichteten Strecke \overline{AB} eine positive oder negative Maßzahl $|AB|$ als Länge oder

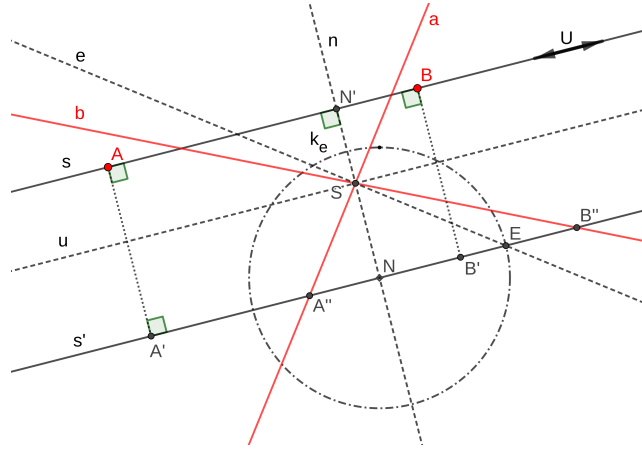


Abbildung 19: Abstand der Polaren

Abstand zugeordnet werden kann. Dies geschieht durch die Festlegung zweier Punkte O und E auf der Geraden mit $|OE| = 1$ und $|EO| = -1$.

Zwei Punkte A und B werden durch eine Polarität in ihre beiden Polaren a und b abgebildet. Was wird dabei aus dem Abstand $|AB|$ der beiden Punkte? Gibt es eine dem Abstand entsprechende *Weite* $|ab|$ ihrer Polaren in dem Fächer \overline{ab} ?

In Abb. 19 sind in einer Geraden s zwei Punkte A und B gezeichnet. Ihre Polaren a und b in Bezug auf den Einheitskreis k_e schneiden sich im Pol S von s und treffen den zu s parallelen Nahstrahl s' in den Punkten A'' und B'' . Die durch A und B gehenden Orthogonalen zu s treffen s' in den Punkten A' und B' , es ist also $|AB| = |A'B'|$. Ist U der Fernpunkt von s und s' , so sind $\lambda_{A'} = DV(NUA'E)$ und $\lambda_{B'} = DV(NUB'E)$ die Nahkoordinaten von A' und B' und es ist

$$|A'B'| = \lambda_{B'} - \lambda_{A'}$$

Wir ergänzen das Polarenbüschel durch den Nahstrahl $n = NS$, die Einheitsgerade $e = ES$ und die Parallele $u = US$ zu s . Dann sind $\lambda_a = DV(nuae)$ und $\lambda_b = DV(nube)$ die Nahkoordinaten von den Polaren a und b und $\frac{1}{\lambda_a} = DV(unae)$ bzw. $\frac{1}{\lambda_b} = DV(unbe)$ die Fernkoordinaten der Polaren a bzw. b .

Die Schnittpunkte der fünf Büschelgeraden n , u , a , b und e mit dem Nahstrahl s' sind die Punkte N , U , A'' , B'' und E , daher ist

$$\begin{aligned} DV(nuae) &= DV(NUA''E) & DV(nube) &= DV(NUB''E) \\ \lambda_a &= \lambda_{A''} & \lambda_b &= \lambda_{B''} \end{aligned}$$

d.h. die Nahkoordinaten der Polaren sind mit den gerichteten Nahkoordinaten $\lambda_{A''} = |NA''|$ und $\lambda_{B''} = |NB''|$ identisch. Diese sind aber die Kehrwerte der Nahkoordinaten der Punkte A' und B' . Denn da A'' auf der Polaren a von A liegt, geht die Polare a'' von A'' durch A und trifft s' orthogonal in A' . Es ist also $|NA''| \cdot |NA'| = 1$, also $\lambda_{A''} = \frac{1}{\lambda_{A'}}$.

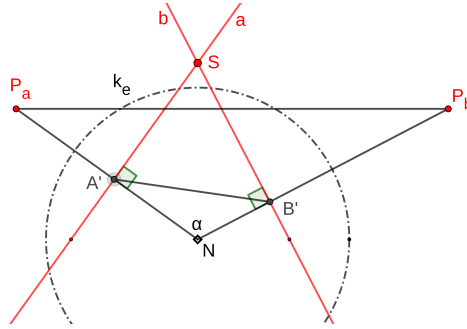


Abbildung 20: Abstand

(siehe Abschnitt Pol und Polare Beziehung auf Seite 4). Ebenso ist $\lambda_{B''} = \frac{1}{\lambda_{B'}}$. Der Abstand $|AB|$ lässt sich daher auch durch die Koordinaten λ_a und λ_b der Polaren a und b darstellen:

$$\begin{aligned} |AB| &= |A'B'| \\ |AB| &= \lambda_{B'} - \lambda_{A'} \\ |AB| &= \frac{1}{\lambda_{B''}} - \frac{1}{\lambda_{A''}} \\ |AB| &= \frac{1}{\lambda_b} - \frac{1}{\lambda_a} \end{aligned}$$

Somit bietet sich folgende Definition des Abstandes zweier Geraden a und b mit dem Schnittpunkt $ab = S$ an:

Definition. Der Abstand $|ab| = \frac{1}{\lambda_b} - \frac{1}{\lambda_a}$ zweier Geraden a und b ist die Differenz ihrer gerichteten Fernkoordinaten im Geradenbüschel ab .

Mit dieser Definition gilt der

Satz. Der Abstand zweier Geraden a und b ist gleich dem Abstand ihrer Pole A und B in Bezug auf die Polarität am Einheitskreis: $|ab| = |AB|$.

Bemerkung 7. Gehören zwei Geraden a und b einem Geradenbüschel an, dessen Träger ein Fernpunkt ist, so sind die Nahkoordinaten λ_a und λ_b die gewöhnlichen Abstände der beiden Geraden vom Nahpunkt N , und es ist $|ab| = \frac{1}{\lambda_b} - \frac{1}{\lambda_a}$ der Abstand der beiden Geraden.

Formel von IMMO DIENER:

Satz. Sind A' und B' die Orthopunkte zweier Geraden a und b , dann ist $|ab| = \frac{|A'B'|}{|A'N| \cdot |B'N|}$

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus Abb. 20 mit dem Cosinussatz in den beiden Dreiecken NAB und NP_aP_b nach Eliminierung von $\cos \alpha$, den Beziehungen

$$|ab| = |P_aP_b| \quad |P_aN| \cdot |A'N| = 1 \quad |P_bN| \cdot |B'N| = 1$$

und der Polarität am Einheitskreis. □

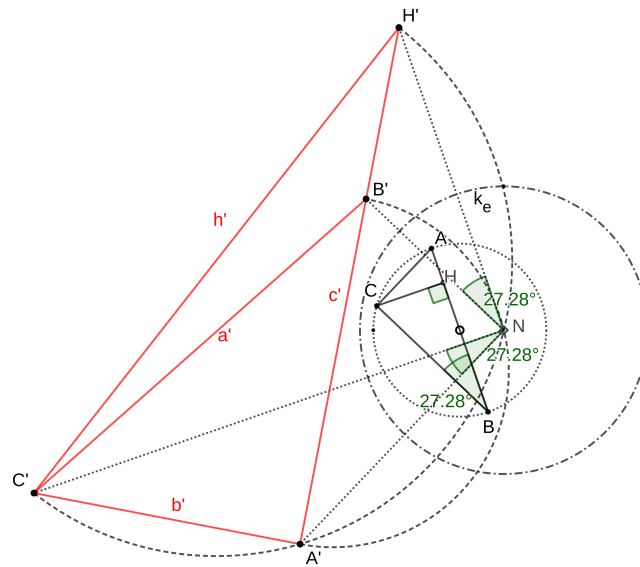


Abbildung 21: Verwandte Dreiseite

3.9 Dreiecke und Dreiseite

Über Dreiecke gibt es eine Vielzahl von eindrucksvollen Sätzen über Inzidenzen. Wir untersuchen den jeweils dualen Satz im Dreiseit.

Zwei Dreiecke sind *ähnlich*, wenn die Fernpunkte der Seiten des einen Dreiecks jeweils dieselben Winkel miteinander bilden wie die Fernpunkte der Seiten des anderen Dreiecks.

Zwei Dreiseite sind *verwandt*, wenn die Nahstrahlen der Eckpunkte des einen Dreiseits jeweils dieselben Winkel miteinander bilden wie die Nahstrahlen der Eckpunkte des anderen Dreiseits.

In Abb. 21 liefert das rechtwinklige Dreieck ABC mit der Höhe h_c die drei ähnlichen Dreiseite ABC, BCH, ACH, die in die drei verwandten Dreiecke $A'B'C'$, $B'C'H'$, $A'C'H'$ abgebildet werden. Da die Seiten a und b und die Seiten c und h_c orthogonal sind, sind auch die Punkte A' und B' sowie C' und H' orthogonal, was durch die beiden Thaleskreise angedeutet ist. Da die Seiten a und c sowie die Seiten b und h_c jeweils den gleichen Winkel bilden, sind auch die Winkel der Punkte A' und C' sowie B' und H' jeweils gleich groß. Alle drei Tripel stimmen also in zwei Winkeln überein und sind daher verwandt.

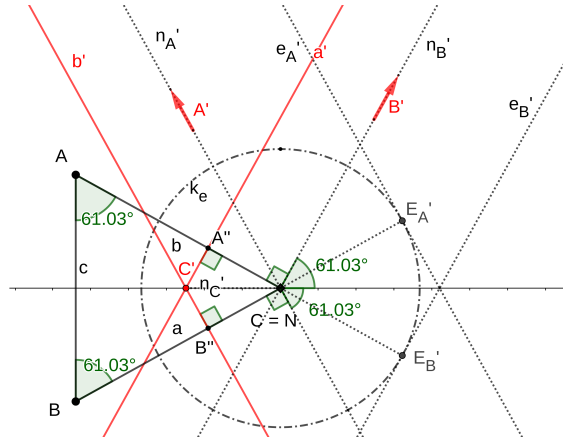


Abbildung 22: Basiswinkel

Hat ein Dreieck abc die zwei gleichen Winkel $(ac) = (bc)$, dann hat es auch die zwei gleichen Abstände $|AC| = |BC|$.

Hat ein Dreieck $A'B'C'$ die zwei gleichen Winkel $(A'C') = (B'C')$, dann hat es auch die zwei gleichen Abstände $|a'c'| = |b'c'|$.

In Abb. 22 wurde der Nahpunkt N in den Punkt C eines Dreiseits mit den gleichen Basiswinkeln $(ac) = (bc)$ gelegt. Dadurch ist die Polare c' von C die Ferngerade und die Pole A' und B' von a und b sind Fernpunkte. Die Nahkoordinaten $\lambda_{a'} = |NA''|$ und $\lambda_{b'} = |NB''|$ der Seiten a' , b' sind dann die Abstände der Seiten a' und b' vom Nahpunkt N (siehe Bemerkung 7). Es ist also

$$\begin{aligned} |c'a'| &= \frac{1}{\lambda_{a'}} - \frac{1}{\lambda_{c'}} & |c'b'| &= \frac{1}{\lambda_{b'}} - \frac{1}{\lambda_{c'}} \\ |c'a'| &= \frac{1}{\lambda_{a'}} & |c'b'| &= \frac{1}{\lambda_{b'}} \end{aligned}$$

da $\frac{1}{\lambda_{c'}} = 0$ wegen $\lambda_{c'} = \infty$.

Die beiden Dreiecke $NC'A''$ und $NC'B''$ sind kongruent, weil sie in der Seite NC' und zwei Winkeln übereinstimmen, daher ist $|NA''| = |NB''|$ und somit auch $|c'a'| = |c'b'|$.

Schwerpunkt

Sind M_a , M_b und M_c die Mittelpunkte der Seiten a , b und c eines Dreiecks ABC , so gehen die Verbindungsgeraden $s_a = AM_a$, $s_b = BM_b$ und $s_c = CM_c$ durch den Schwerpunkt S des Dreiecks.

Leichtgerade

Sind m_A , m_B und m_C die Mittelstrahlen der Ecken A , B und C eines Dreiseits abc , so liegen die Schnittpunkte $S_A = am_A$, $S_B = bm_B$ und $S_C = cm_C$ in der Leichtgeraden s des Dreiseits (Abb. 23).

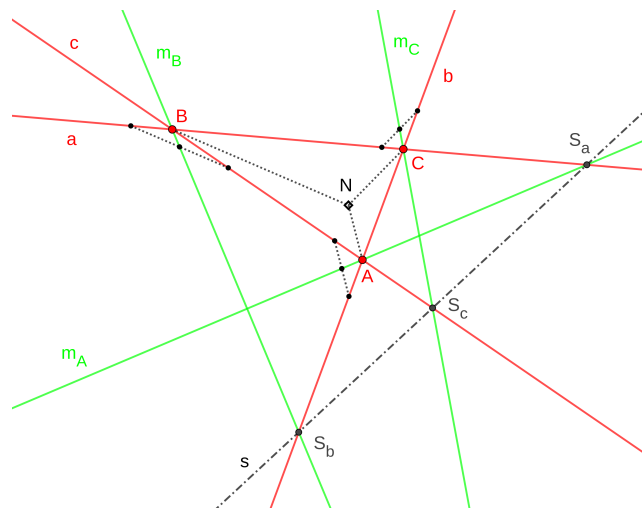


Abbildung 23: Leichtgerade

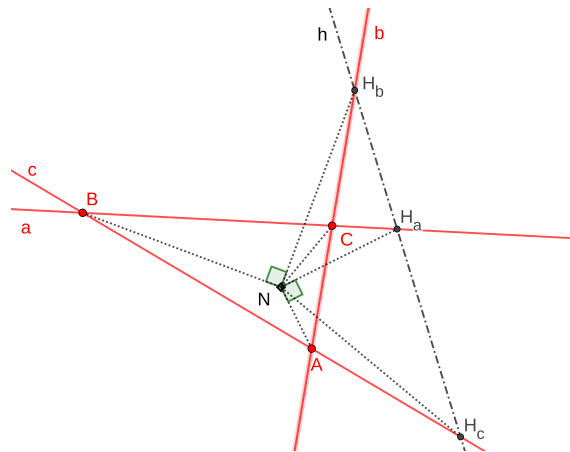


Abbildung 24: Duale Höhen im Dreieit

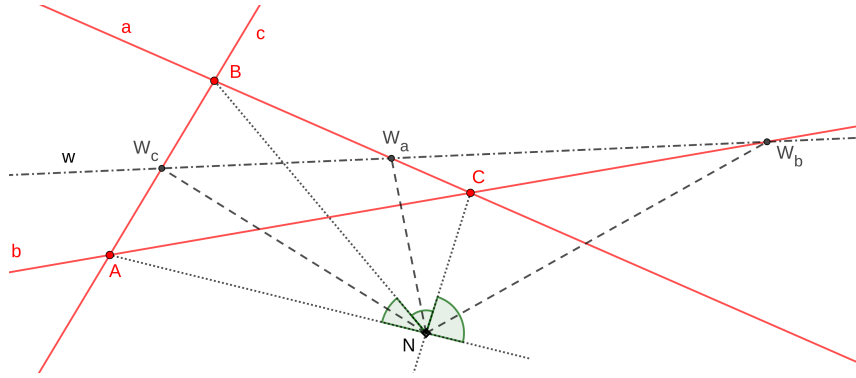


Abbildung 25: Winkelhalbierer

Höhensatz

Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c , so ist die mit A inzidierende zu a orthogonale Gerade h_A eindeutig bestimmt, ebenso h_B und h_C , und die drei Geraden h_A, h_B und h_C inzidieren mit einem Punkt H .

Dualer Höhensatz

Ist abc ein Dreieck mit den Ecken A, B, C , so ist der mit a inzidierende zu A orthogonale Punkt H_a eindeutig bestimmt, ebenso H_b und H_c , und die drei Punkte H_a, H_b und H_c inzidieren mit einer Geraden h (Abb. 24).

Bemerkung 8. Diese Formulierung des dualen Höhensatzes setzt voraus, dass der Nahpunkt in keiner der Ecken A, B oder C liegt. Ist $N = A$, so ist die Gerade AN unbestimmt und somit auch ihre Normale. Es existieren aber H_b und H_c und somit auch $h = H_bH_c$. Es ist dann $H_a = ah$. Der Satz gilt auch, wenn der Nahpunkt auf einer Seite des Dreiecks liegt.

Winkelhalbierendenbüschel

Ist abc ein Dreieck mit den Ecken A, B, C , so sind die zueinander orthogonalen Geraden w_A und w'_A , die die Winkel zwischen den Seiten b und c halbieren, eindeutig bestimmt, ebenso w_B, w'_B und w_C, w'_C .

Dann inzidieren $w_Aw_Bw_C = W$,
 $w_Bw_Cw'_A = W_A$, $w_Cw_Aw'_B = W_B$,
 $w_Aw_Bw'_C = W_C$.

Winkelhalbiererreihe

Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c , so sind die zueinander orthogonalen Punkte W_a und W'_a , die die Winkel zwischen den Punkten B und C halbieren, eindeutig bestimmt, ebenso W_b, W'_b und W_c, W'_c .

Dann inzidieren $W_aW_bW_c = w$,
 $W_bW_cW'_a = w_a$, $W_cW_aW'_b = w_b$,
 $W_aW_bW'_c = w_c$ (Abb. 25).

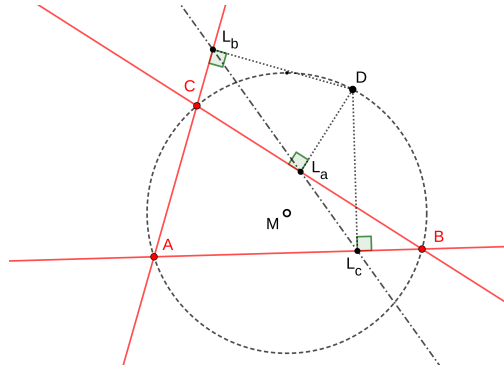


Abbildung 26: Simsongerade

Simson- oder Wallace-Gerade:

Ist k der Umkreis eines Dreiecks ABC mit den Seiten a , b und c und ist D ein weiterer beliebiger Punkt von k , so gibt es genau eine mit D inzidierende Gerade l_a , die orthogonal zu a ist, ebenso l_b und l_c .

Dann inzidieren die drei Schnittpunkte $L_a = al_a$, $L_b = bl_b$ und $L_c = cl_c$ mit einer Geraden, der Simsongeraden des Punktes D (Abb. 26, Beweis im Anhang).

Simson-oder Wallace-Punkt:

Ist k der In- oder Ankegelschnitt eines Dreiecks abc mit den Ecken A , B und C und ist d eine weitere beliebige Tangente von k , so gibt es genau einen mit d inzidierenden Punkt L_A , der orthogonal zu A ist, ebenso L_B und L_C .

Dann inzidieren die drei Verbindungsgeraden $l_a = AL_A$, $l_b = BL_B$ und $l_c = CL_C$ mit einem Punkt, dem *Simsonpunkt* von d (Abb. 27).

Mittelsenkrechtenbüschel

Ist abc ein Dreieck mit den Ecken A , B und C , so ist die mit dem Mittelpunkt M_a inzidierende zu a orthogonale Gerade g_a eindeutig bestimmt, ebenso g_b und g_c , und die drei Geraden g_a , g_b , g_c inzidieren mit einem Punkt M .

Orthogonalpunktreihe

Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten a , b und c , so ist der mit dem Mittelstrahl m_A inzidierende zu A orthogonale Punkt G_A eindeutig bestimmt, ebenso G_B und G_C , und die drei Punkte G_A , G_B und G_C inzidieren mit einer Geraden m (Abb. 28).

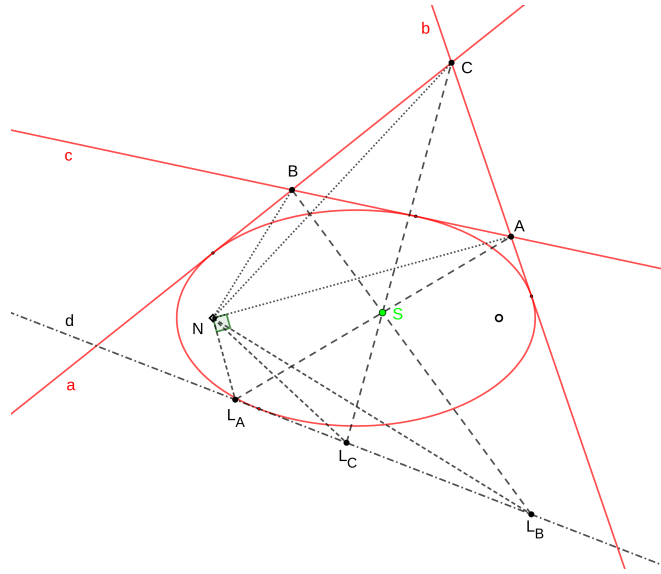


Abbildung 27: Simsonpunkt

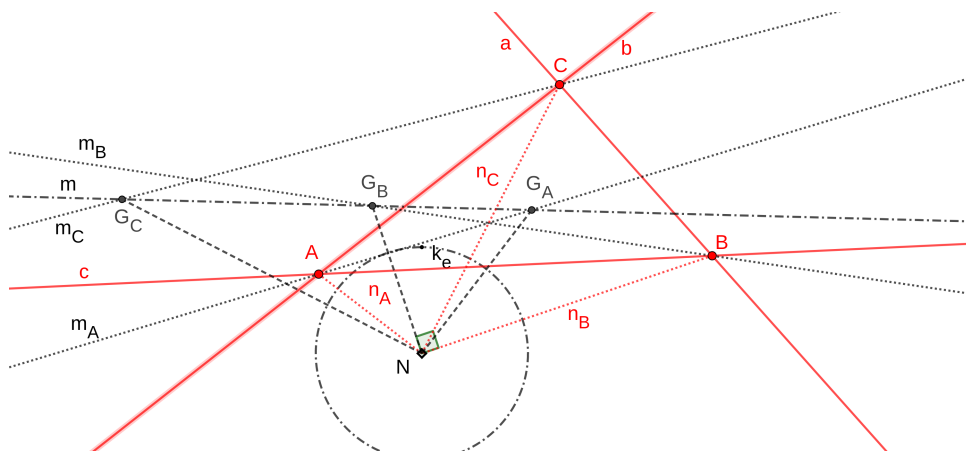


Abbildung 28: Orthogonalpunktreihe

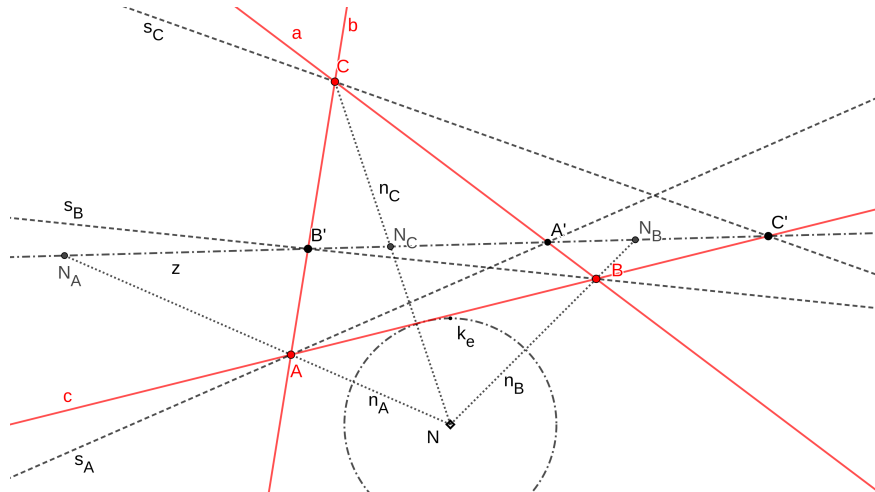


Abbildung 29: Dualer Satz des Ceva

Satz des Ceva:

Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und Z ein beliebiger Punkt, der nicht mit den Seiten inzidiert, dann ist der Schnittpunkt S_a der Geraden $AZ = a'$ mit der Seite a eindeutig bestimmt, ebenso S_b und S_c . Sind U_a, U_b und U_c die Fernpunkte der Seiten a, b und c , dann gilt

$$\lambda_a \cdot \lambda_b \cdot \lambda_c = 1$$

mit

$$\lambda_a = DV(BCS_aU_a)$$

$$\lambda_b = DV(CAS_bU_b)$$

$$\lambda_c = DV(ABS_cU_c)$$

Dualer Satz des Ceva:

Ist abc ein Dreieck mit den Ecken A, B, C und z eine beliebige Gerade, die nicht mit den Ecken inzidiert, dann ist die Verbindungsgerade s_A des Punktes $az = A'$ mit der Ecke A eindeutig bestimmt, ebenso s_B und s_C . Sind n_A, n_B und n_C die Nahstrahlen der Ecken A, B und C , dann gilt

$$\lambda_a \cdot \lambda_b \cdot \lambda_c = 1$$

mit

$$\lambda_a = DV(bcs_{An_A})$$

$$\lambda_b = DV(cas_{Bn_B})$$

$$\lambda_c = DV(abs_{Cn_C})$$

Konventionelle Beweisidee:

Alle 9 Geraden treffen die Gerade z (Abb. 29) in 9 Punkten. Die Doppelverhältnisse der Geraden sind identisch mit den Doppelverhältnissen der entsprechenden Punkte in z . Dort erhält man Streckenverhältnisse, deren Produkt 1 ergeben muss.

Satz des Menelaos:

Ist abc ein Dreieck mit den Ecken A, B, C und z eine beliebige Gerade, die nicht mit den Ecken inzidiert, dann ist der Schnittpunkt $S_a = az$ eindeutig bestimmt, ebenso S_b und S_c . Sind U_a, U_b, U_c die Fernpunkte der Seiten a, b, c , dann gilt

$$\lambda_a \cdot \lambda_b \cdot \lambda_c = -1$$

mit

$$\lambda_a = DV(BCS_aU_a)$$

$$\lambda_b = DV(CAS_bU_b)$$

$$\lambda_c = DV(ABS_cU_c)$$

Dualer Satz des Menelaos:

Ist ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und Z ein beliebiger Punkt, der nicht mit den Seiten inzidiert, dann ist die Verbindungsgerade $s_A = AZ$ eindeutig bestimmt, ebenso s_B und s_C . Sind n_A, n_B, n_C die Nahstrahlen der Ecken A, B, C , dann gilt

$$\lambda_A \cdot \lambda_B \cdot \lambda_C = -1$$

mit

$$\lambda_A = DV(bcs_An_A)$$

$$\lambda_B = DV(cas_Bn_B)$$

$$\lambda_C = DV(abs_Cn_C)$$

3.10 Umkreis, Inkreis, Ankreis

Eine Polarität bildet ein Dreieck in ein Dreieck und ein Dreieck in ein Dreieck ab. Der Umkreis des Dreiecks wird dabei in eine In- oder Ankurve des Bilddreiecks in Form eines Kegelschnitts abgebildet. Um welchen Kegelschnitt es sich dabei handelt, hängt völlig von der Lage des Polarisators ab.

Der Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks werden dabei jeweils in eine Umkurve des Bilddreiecks in Form eines Kegelschnitts abgebildet. Es gibt also fünf Bildkurven, nämlich vier Umkurven des Bilddreiecks und eine In- oder Ankurve des Bilddreiecks, deren Gestalt jeweils wiederum von der Lage des Polarisators in Bezug auf das Dreieck mit dem Dreieck abhängt. Alle Kegelschnitte haben den Nahpunkt als einen gemeinsamen Brennpunkt.

In Abb. 30 wird der Umkreis des Dreiecks ABC in eine Parabel als Ankurve des Bilddreiecks $a'b'c'$ abgebildet, weil der Umkreis durch den Nahpunkt geht.

In Abb. 31 wird der Umkreis des Dreiecks ABC in eine Ellipse als Inkurve des Dreiecks $a'b'c'$ abgebildet, weil der Nahpunkt im Inneren des Umkreises liegt.

In Abb. 32 wird der Inkreis des Dreiecks abc in eine Ellipse als Umkurve des Dreiecks $A'B'C'$ abgebildet, weil der Nahpunkt im Inneren des Inkreises liegt.

Ist der Nahpunkt ein äußerer Punkt eines In- oder An- oder Umkreises eines Dreiecks, so ist die Bildkurve eine Hyperbel, die dann entweder eine Umkurve des Bilddreiecks $A'B'C'$ oder eine Ankurve des Bilddreiecks $a'b'c'$ ist.

Bemerkung 9. Es könnte interessant sein, die verschiedenen Möglichkeiten der Um- In- und Ankurven zu untersuchen, insbesondere auch für pathologische Dreiecke (ein oder zwei Ecken sind Fernpunkte) oder solche mit dem Nahpunkt als einem Eckpunkt.

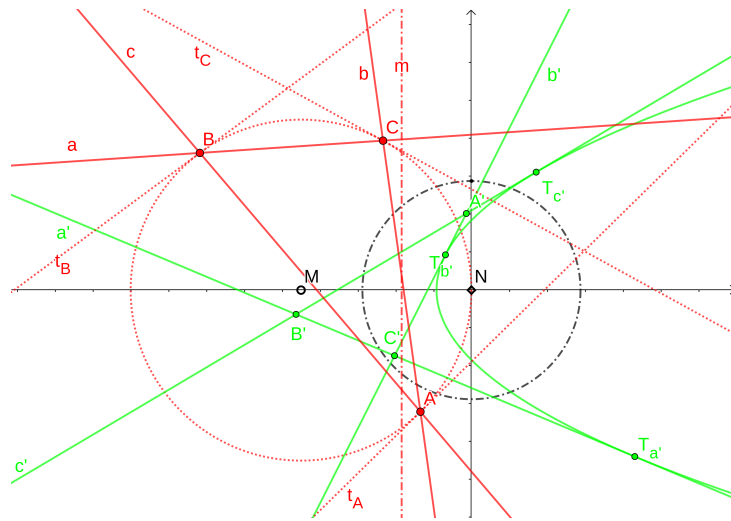


Abbildung 30: Umkreis \leftrightarrow Ankurve

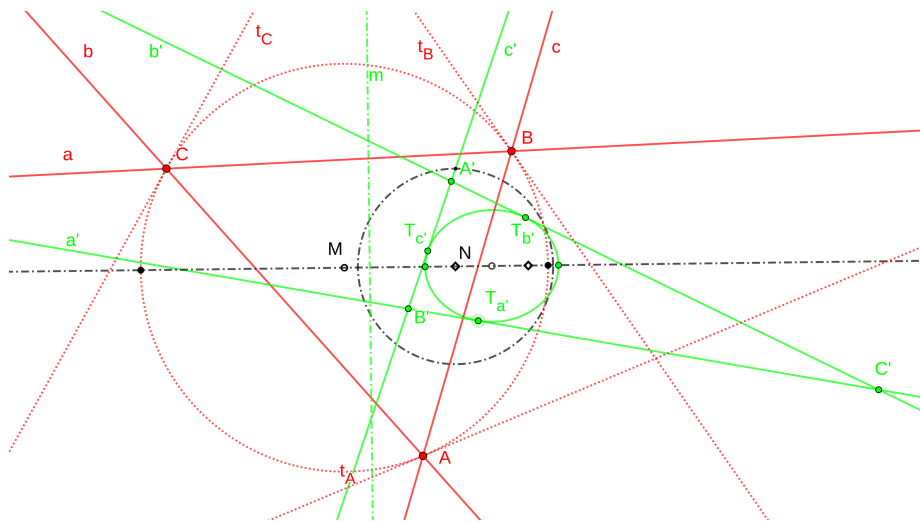


Abbildung 31: Umkreis \leftrightarrow Inkurve

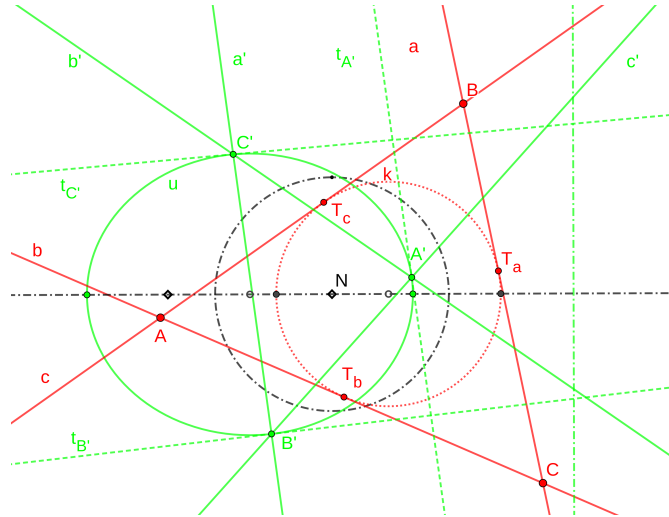


Abbildung 32: Inkreis \leftrightarrow Umkurve

3.11 Kreisgeometrie

Es sei nochmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Aussagen in der jeweils rechten Textspalte sowohl für Ellipsen als auch Parabeln als auch Hyperbeln gelten, weil das Bild eines Kreises je nach Lage des Nahpunktes sowohl eine Ellipse als auch eine Parabel als auch eine Hyperbel sein kann, mit jeweils dem Nahpunkt als Brennpunkt. Dies ist eine Stärke der PEG, sie bringt die Verwandtschaft der Kegelschnitte und ihrer Eigenschaften in Erscheinung.

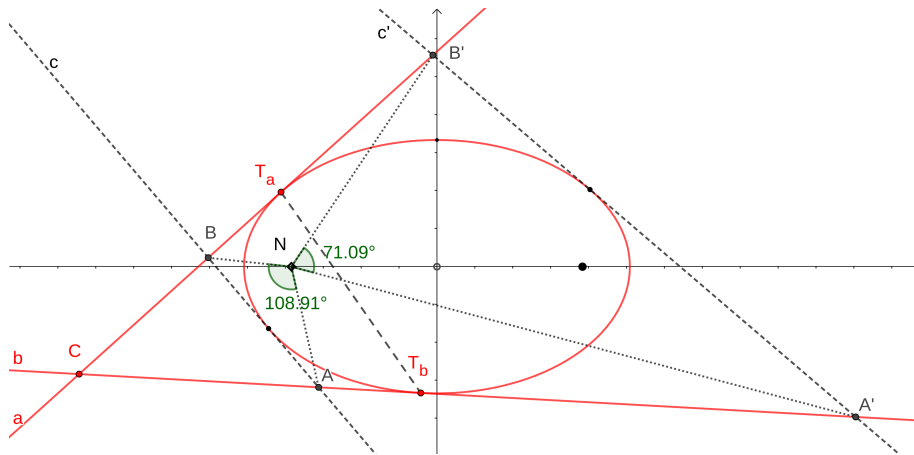


Abbildung 33: Zentriwinkel

Peripheriewinkel:

Es sei k ein Kreis mit zwei beliebigen festen Punkten A und B von k , ihren Tangenten t_A und t_B und der Geraden $AB = c$.

Dann teilen die Punkte A und B den Kreis in zwei Kurvenbögen.

Es sei C ein beweglicher Punkt auf dem einen Kurvenbogen mit den Seiten $AC = b$, $BC = a$ und C' ein beweglicher Punkt auf dem anderen Kurvenbogen mit den Seiten $AC' = b'$, $BC' = a'$.

Dann sind die Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle AC'B$ konstant und es ist

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle AC'B = 180^\circ.$$

Ist der Schnittpunkt $S = t_A t_B$ ein Fernpunkt, so ist $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC'B = 90^\circ$ (Satz des Thales).

Zentriwinkel (Abb. 33):

Es sei k ein Kegelschnitt mit zwei beliebigen festen Tangenten a und b von k , ihren Berührungspunkten T_a und T_b und dem Schnittpunkt $ab = C$.

Dann teilen die Tangenten a und b den Kegelschnitt in zwei Kurvenbögen.

Es sei c eine bewegliche Tangente auf dem einen Kurvenbogen mit den Punkten $ac = B$, $bc = A$ und c' eine bewegliche Tangente auf dem anderen Kurvenbogen mit den Punkten $ac' = B'$, $bc' = A'$.

Dann sind die Winkel $\sphericalangle acb$ und $\sphericalangle ac'b$ konstant und es ist $\sphericalangle acb + \sphericalangle ac'b = 180^\circ$.

Ist die Verbindungsgerade $s = T_a T_b$ ein Nahstrahl, so ist $\sphericalangle acb = \sphericalangle ac'b = 90^\circ$.

Bemerkung 10. Da der Umkreis eines rechtwinkligen Dreiecks ABC stets die Hypotenuse AB als Durchmesser hat, ist $S = t_A t_B$ ein Fernpunkt und im dualen Dreieck die Gerade $s = T_a T_b$ ein Nahstrahl und in Abb. 33 sind die Zentriwinkel $\sphericalangle AB = 90^\circ$ und $\sphericalangle A'B' = 90^\circ$.

In Abb. 34 seien A und B zwei beliebige Punkte eines Kreises mit ihren Tangenten a und b .

Es sei $C = ab$ der Schnittpunkt der Tangenten. Dann ist die Verbindungsgerade $s = CM$ von C mit dem Mittelpunkt M orthogonal zur Geraden $c = AB$.

C kann auch ein Fernpunkt sein.

In Abb. 34 seien a und b zwei beliebige Tangenten eines Kegelschnitts mit ihren Berührungspunkten A und B .

Es sei $c = AB$ die Verbindungsgerade der Berührungspunkte. Dann ist der Schnittpunkt $S = cm$ von c mit der Leitlinie m orthogonal zum Punkt $C = ab$.

c kann auch ein Nahstrahl sein.

Winkelhalbierende (Abb. 35)

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und zwei Tangenten a und b von k mit dem Schnittpunkt $P = ab$. Dann ist die Gerade $w = PM$ und ihre durch P gehende orthogonale Gerade w' jeweils eine Winkelhalbierende der Tangenten a und b .

Winkelhalbierender (Abb. 35)

Gegeben sei ein Kegelschnitt k mit der Leitlinie m und zwei Punkten A und B von k mit der Verbindungsgeraden $p = AB$. Dann ist der Punkt $W = pm$ und sein in p liegender orthogonaler Punkt W' jeweils ein Winkelhalbierender der Punkte A und B .

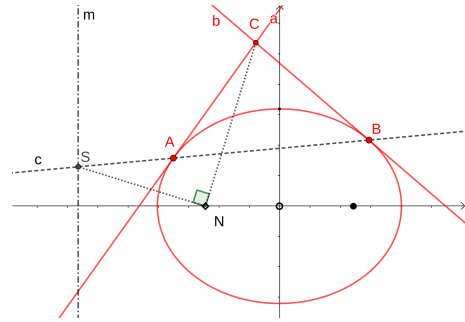
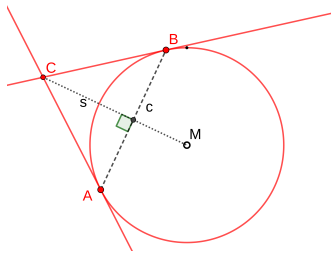


Abbildung 34: Orthogonale Punkte C und S

Hieraus folgt mit dem Sachverhalt der Abb. 34, dass $P = ab$ auf der Geraden NW' liegt und somit der Nahstrahl von P die Winkelhalbierende der Brennstrahlen von A und B ist.

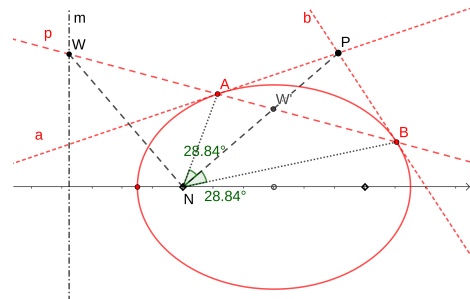
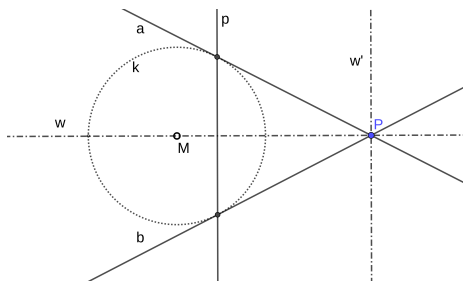


Abbildung 35: Winkelhalbierende in Kreis und Ellipse

3.12 Chordale

Zu zwei Kreisen gehört stets eine besondere Gerade, die Chordale. Schneiden oder berühren sich die Kreise, so ist die Chordale die gemeinsame Sekante oder Tangente.

Die Chordale heißt auch Potenzlinie, da jeder ihrer Punkte die gleiche Potenz in Bezug auf die beiden Kreise hat.

Unter der Potenz eines Punktes P in Bezug auf einen Kreis k versteht man das Produkt der beiden Sekantenabschnitte $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$, welches nach dem Sekanten-Tangentensatz für alle Sekanten AB, die durch P gehen, denselben Wert hat.

Die Potenz ist positiv für äußere Punkte, Null für Kreispunkte und negativ für innere Punkte. Ist r der Kreisradius, so ist $-r^2 \leq \overline{PA} \cdot \overline{PB} \leq \infty$.

Für äußere Punkte stimmt die Potenz mit dem Quadrat des Tangentenabschnitts t überein: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = t^2$, und dies ist nach dem Satz des Pythagoras $t^2 = |PM|^2 - r^2$ (siehe Abb. 36).

Als Potenzlinie existiert die Chordale auch für Kreise, die sich nicht schneiden (Abb. 37).

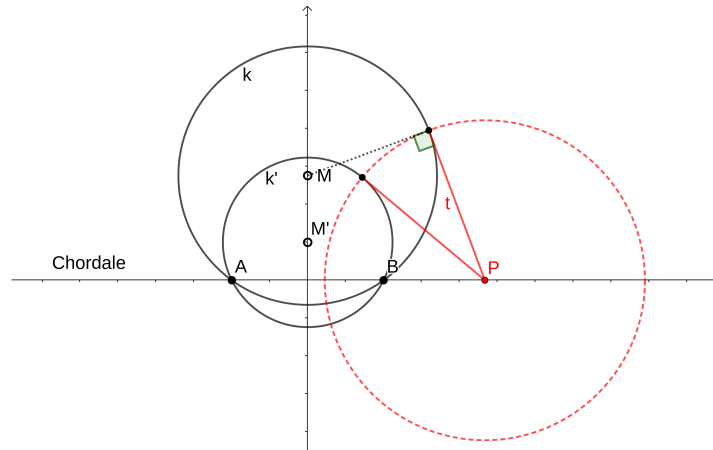


Abbildung 36: Chordale

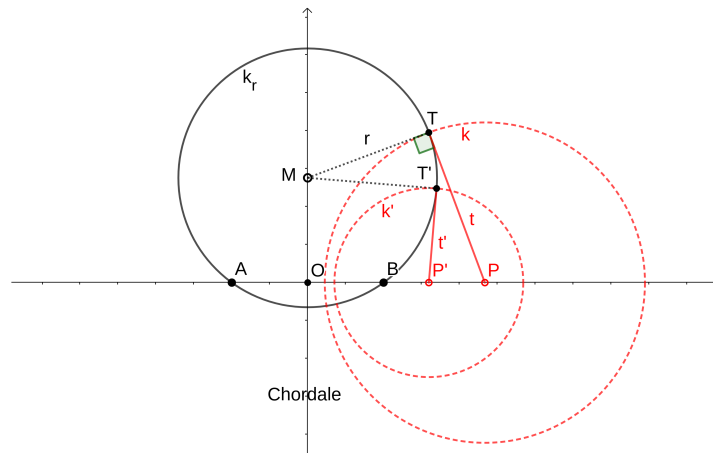


Abbildung 37: Potenzlinie

Die Chordale ist stets orthogonal zu der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte M und M' . Ihre Konstruktion gelingt am einfachsten mit einem geeigneten Hilfskreis h , der die beiden Kreise schneidet. Denn der Schnittpunkt S der beiden Sekanten des Hilfskreises liegt auf der Chordale, sie ist dann die durch S gehende Orthogonale zur Verbindungsgeraden MM' (Abb. 38).

3.13 Orthogonale Kreisbündel

Alle Kreise, die sich in zwei Punkten A und B schneiden, bilden ein Kreisbündel mit der Geraden AB als gemeinsamer Chordale. In Abb. 37 ist einer von ihnen gezeichnet (k_r). Offenbar erzeugt er mit jedem seiner Punkte einen zweiten Kreis mit Mittelpunkt auf AB , den er orthogonal schneidet. Alle diese Kreise haben keine gemeinsamen Punkte und bilden ein zweites Kreisbündel, aber alle haben eine gemeinsame Chordale, nämlich

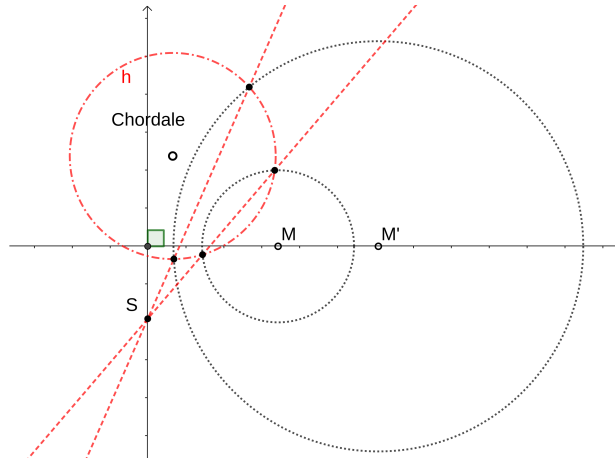


Abbildung 38: Konstruktion der Chordale

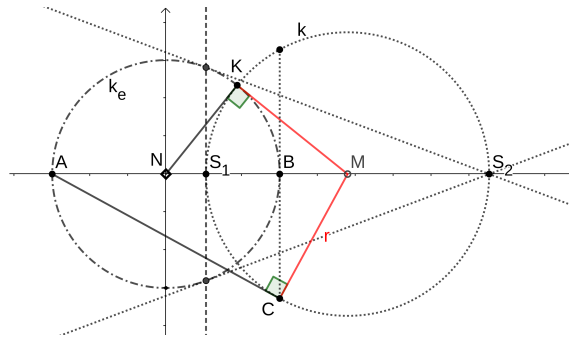


Abbildung 39: Pol und Polare im Kreisbüschel

die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{AB} , denn der auf der Mittelsenkrechten liegende Mittelpunkt M des Kreises k_r hat in Bezug auf alle Kreise des zweiten Büschels die gleiche Potenz r^2 .

Die Kreise des zweiten Büschels haben aber noch eine gemeinsame Eigenschaft, wie aus Abb. 39 ersichtlich: Die beiden Punkte A und B sind konjugierte Punkte in Bezug auf jeden Kreis des Büschels.

Beweis. Es sei C ein Schnittpunkt der Tangente von k_e im Punkt B mit dem Kreis k . Dann trifft die Tangente von k im Berührungspunkt C die Gerade NM in einem Punkt A' , und nach dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck MCA' ist $r^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MA'}$. Andererseits ist nach dem Sekanten-Tangentensatz in Bezug auf den Kreis k_e wegen $\overline{MK} = r$ aber auch $r^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MA}$, und daraus folgt $A' = A$. Somit ist A der Pol der Sekante BC in Bezug auf den Kreis k , qed. \square

Vertauscht man die Rollen von k_e und k , so folgt mit der gleichen Argumentation, dass die Polare von S_1 in Bezug auf k_e durch S_2 geht und somit die Polare von S_2 auch durch

S_1 geht. Die Schnittpunkte von k mit der Geraden AB sind also konjugierte Punkte der hyperbolischen Involution auf der Geraden AB .

Bemerkung 11. Jeder Kreis des Büschels mit der gemeinsamen Sekante $s = AB$ erzeugt auf s *dieselbe* hyperbolische Involution, daher heißt das Kreisbüschel auch hyperbolisch. Jeder Kreis des dazu orthogonalen Kreisbüschels mit der gemeinsamen Chordale als Passante erzeugt auf dieser *dieselbe* elliptische Involution, daher nennt man das Kreisbüschel auch elliptisch. Die Namensgebung ist jedoch nicht eindeutig. Da jeder Kreis, der durch A und B geht, die Mittelsenkrechte von AB in konjugierten Punkten einer elliptischen Involution schneidet, wird dieses Kreisbüschel auch ein elliptisches genannt und das orthogonale Kreisbüschel als ein hyperbolisches bezeichnet, weil jeder dieser Kreise die Gerade AB in konjugierten Punkten derselben hyperbolischen Involution trifft.

Wir untersuchen nun die durch eine Polarität erzeugten Bildkurven orthogonaler Kreisbüschel.

Zu zwei Kreisen (mit der Ferngerade als gemeinsamer Leitlinie), die zwei Punkte A und B gemeinsam haben, gehört die Verbindungsgerade $AB = c$ als eine besondere zu der Verbindungsgeraden s der Mittelpunkte orthogonale Gerade. Sie heißt *Chordale* oder *Potenzlinie*.

Zu zwei Kegelschnitten mit dem Nahpunkt als gemeinsamem Brennpunkt, die zwei Tangenten a und b gemeinsam haben, gehört der Tangentenschnittpunkt $ab = C$ als ein besonderer zum Schnittpunkt L der Leitlinien orthogonaler Punkt. Wir nennen ihn *Chordpunkt*.

Sind k_1 und k_2 zwei Kreise (mit der Ferngerade als gemeinsamer Leitlinie), die keinen gemeinsamen Punkt haben, so gibt es in der Verbindungsgeraden $s = M_1M_2$ der beiden Mittelpunkte genau zwei Punkte A und B , die sowohl in Bezug auf k_1 als auch in Bezug auf k_2 konjugiert sind.

Sind k_1 und k_2 zwei Kegelschnitte mit dem Nahpunkt als gemeinsamem Brennpunkt, die keine gemeinsame Tangente haben, so gibt es in dem Schnittpunkt $S = m_1m_2$ der beiden Leitlinien genau zwei Geraden a und b , die sowohl in Bezug auf k_1 als auch in Bezug auf k_2 konjugiert sind.

Die durch den Mittelpunkt M der Strecke \overline{AB} gehende zu s orthogonale Gerade ist die Chordale von k_1 und k_2 .

Der in dem Mittelstrahl m des Fächers \overline{ab} liegende zu S orthogonale Punkt ist der Chordpunkt von k_1 und k_2 .

Abb. 40 enthält ein Beispiel für den Chordpunkt einer Ellipse und einer Parabel, die zwei gemeinsame Tangenten haben. Die beiden Kegelschnitte gehören einem hyperbolischen Kegelschnittbüschel an. Die Konstruktion der gemeinsamen Tangenten und damit des Chordpunktes C gelingt mit den Schnittpunkten H_1 und H_2 der Parabelschiebeltangente t_S mit dem Hauptkreis der Ellipse.

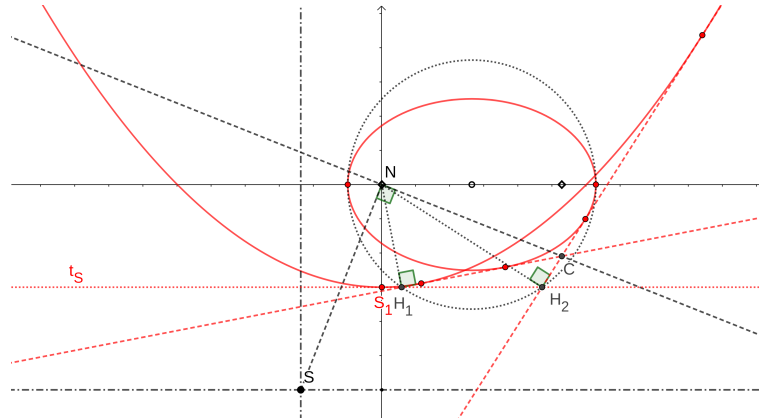


Abbildung 40: Chordpunkt Ellipse und Parabel

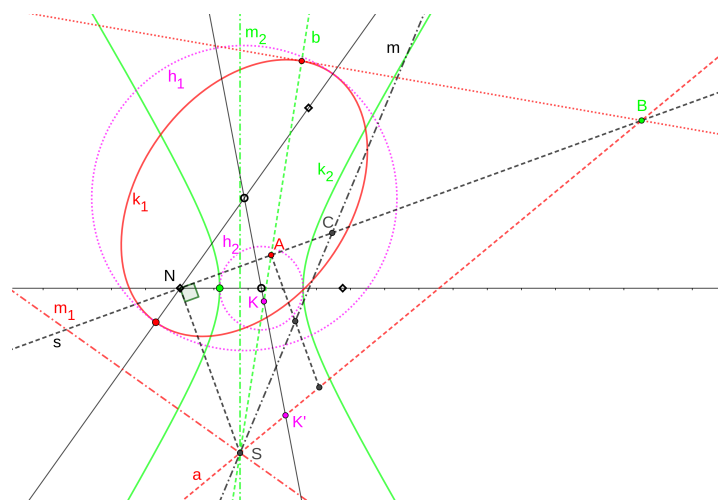


Abbildung 41: Chordpunkt Ellipse und Hyperbel

Abb. 41 enthält den Chordpunkt C einer Ellipse k_1 und Hyperbel k_2 , die keine gemeinsame Tangente haben. Daher hat der Hauptkreis h_1 der Ellipse mit dem Hauptkreis h_2 der Hyperbel keinen gemeinsamen Punkt, und es gibt auf der Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte genau zwei zu h_1 und h_2 konjugierte Punkte K und K' . Es sind dann die Geraden $a = LK'$ und $b = LK$ die beiden sowohl in Bezug auf k_1 als auch in Bezug auf k_2 konjugierten Geraden. Die beiden Kegelschnitte gehören einem elliptischen Kegelschnittbüschel an.

Bemerkung 12. Nach dem Satz in Abschnitt 3.11 ist die Polare eines Punktes S der Leitlinie eines Kegelschnitts orthogonal zum Nahstrahl von S . Daher ist in den Abbildungen 40 und 41 die durch den Nahpunkt N gehende Polare des Schnittpunktes S der beiden Leitlinien in Bezug auf den Kegelschnitt k_1 identisch mit der Polaren s von S in Bezug auf den Kegelschnitt k_2 .

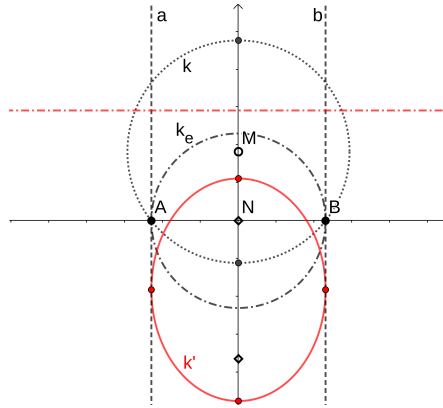


Abbildung 42: Ellipsenbündel

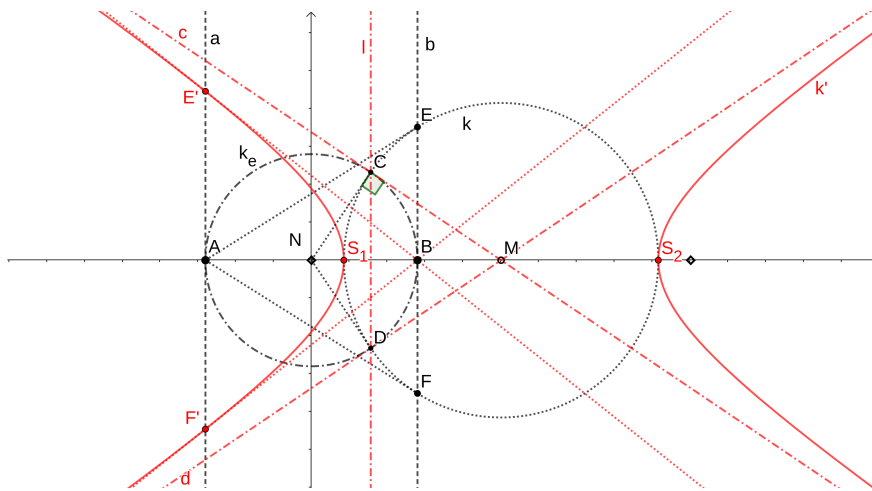


Abbildung 43: Hyperbelbündel

Die Bildkurven eines Kreisbündels hängen natürlich wesentlich von der Lage des Nahpunktes ab. Wir legen den Nahpunkt in den Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} und wählen den Kreis k_e mit dem Durchmesser \overline{AB} als Polarisator. Dann wird das Kreisbündel mit der gemeinsamen Chordale AB in ein Ellipsenbündel abgebildet.

In Abb. 42 ist ein Kreis k und sein Bild k' dargestellt. Alle Ellipsen haben die beiden Polaren a und b der Punkte A und B als gemeinsame Tangenten, und den Nahpunkt N als Brennpunkt. Der gemeinsame Chordpunkt aller Ellipsen ist der Fernpunkt der Geraden a und b . Er ist orthogonal zum gemeinsamen Fernpunkt aller Leitlinien.

In Abb. 43 ist ein Kreis k des orthogonalen elliptischen Kreisbündels mit dem Polarisator k_e dargestellt. Der Nahpunkt ist ein äußerer Punkt von k , daher ist die Bildkurve k' von k eine Hyperbel. Da die Polare von S_1 in Bezug auf k_e durch S_2 geht (siehe Abb. 39), sind S_1 und S_2 die Scheitelpunkte der Hyperbel. Die Polaren der beiden Schnittpunkte

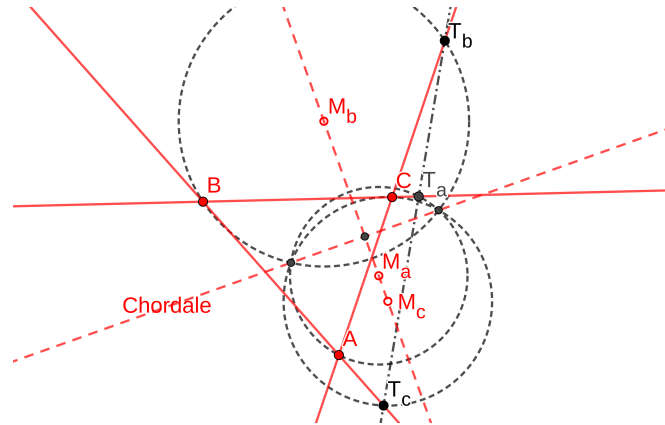


Abbildung 44: Satz von Bodenmiller-Steiner

C und D von k sind einerseits die Tangenten c und d von k_e und andererseits Tangenten von der Hyperbel k' . Da die Tangenten in C und D an k Nahstrahlen sind, sind ihre Pole Fernpunkte der Hyperbel. Daher sind c und d die Asymptoten der Hyperbel.

Die Polare b von B trifft k in den Punkten E und F. Die Polare von E ist eine Tangente von k' mit dem Berührungspunkt E' und geht durch B, weil E in b liegt. Ebenso geht die Polare von F durch B und ist eine Hyperbeltangente mit dem Berührungspunkt F'. Somit sind die Geraden a und b konjugiert in Bezug auf die Hyperbel k' . Der Punkt $S = ab$ ist ein Fernpunkt und der Mittelstrahl von (ab) die Ferngerade. Auf ihr liegt der zu S orthogonale Chordpunkt. Dieser ist somit der Fernpunkt der Hyperbelachse. Das orthogonale Kreisbüschel wird also in eine Hyperbelschar mit gemeinsamer Achse abgebildet, deren Fernpunkt der gemeinsame Chordpunkt ist.

Satz von Bodenmiller-Steiner

Die drei rechten Winkel in der Abb. 24 auf Seite 29 gehören zu rechtwinkligen Dreiecken und führen zu drei Thaleskreisen, die stets eine gemeinsame Chordale haben (Abb. 44). Sie gehören zu einem hyperbolischen Kreisbüschel mit einer gemeinsamen Chordalen.

Dies hängt mit dem folgenden Satz von Bodenmiller-Steiner zusammen:

Satz von Bodenmiller (Beweis im Anhang)

Es sei $abcd$ ein Viereck in allgemeiner Lage. Wir fassen die Seite d als Transversale des Dreiseits abc mit den Ecken A, B, C auf.

Die Schnittpunkte von d mit dem Dreiseit seien $P_a = ad$, $P_b = bd$ und $P_c = cd$.

Dualer Satz von Bodenmiller

Es sei ABCD ein Viereck in allgemeiner Lage. Wir fassen die Ecke D als Zentrum des Dreiecks ABC mit den Seiten a , b , c auf.

Die Verbindungsgeraden von D mit dem Dreieck seien $p_A = AD$, $p_B = BD$ und $p_C = CD$.

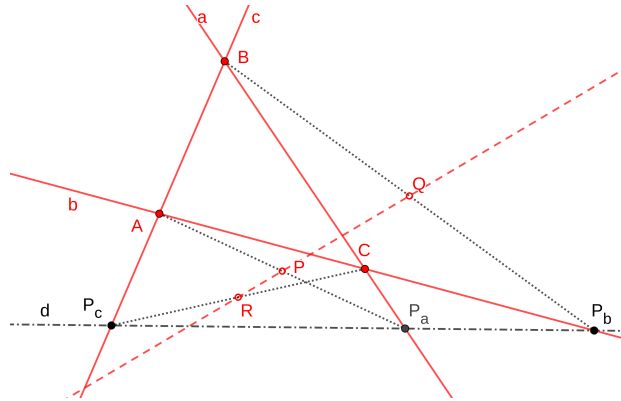


Abbildung 45: Satz von Gauß

Dann gehören die drei Kreise k_A, k_B, k_C mit den Durchmessern AP_a, BP_b, CP_c und den zugehörigen Mittelpunkten M_A, M_B, M_C einem hyperbolischen oder elliptischen Kreisbüschel mit einer gemeinsamen Chordale an.

Dann gehören die drei Kegelschnitte k_a, k_b, k_c mit den Leitlinienpunkten ap_A, bp_B, cp_C und den zugehörigen Mittelstrahlen m_a, m_b, m_c als Leitlinien einem hyperbolischen oder elliptischen Kegelschnittbüschel mit einem gemeinsamen Chordpunkt an.

Die drei Kreismittelpunkte liegen in einer zur Chordalen orthogonalen Geraden. Dies ist der

Satz von Gauß (Beweis im Anhang)

Gegeben sei ein Dreieck abc mit den Ecken A, B, C und einer Geraden d , die durch keine Ecke geht. Die Schnittpunkte von d mit den Seiten seien $P_a = ad, P_b = bd, P_c = cd$.

Es sei P der Mittelpunkt von AP_a , Q der Mittelpunkt von BP_b und R der Mittelpunkt von CP_c .

Dann liegen die drei Mittelpunkte P, Q, R auf einer Geraden (Abb. 45).

Dualer Satz von Gauß

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und ein Punkt D , der auf keiner Seite liegt. Die Verbindungsgeraden von D mit den Ecken seien $t_A = DA, t_B = DB, t_C = DC$.

Es sei p der Mittelstrahl von at_A , q der Mittelstrahl von bt_B und r der Mittelstrahl von ct_C .

Dann gehen die drei Mittelstrahlen p, q, r durch einen Punkt (Abb. 46).

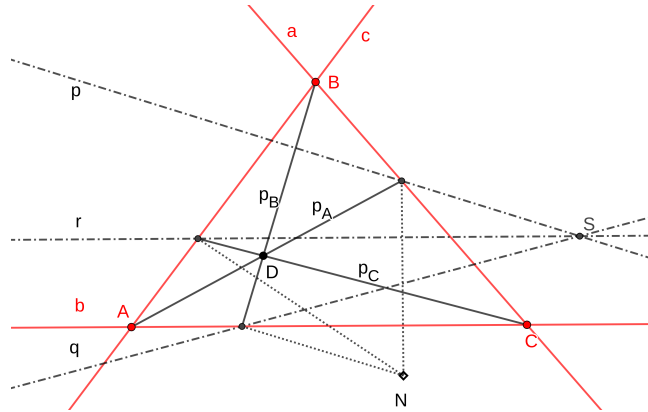


Abbildung 46: Dualer Satz von Gauß

3.14 Ähnlichkeitszentren und Ähnlichkeitslinien

Gegeben sind drei Kreise k_1, k_2, k_3 (mit der Ferngeraden als gemeinsamer Leitlinie) und den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 . Sie liegen so, dass je zwei von ihnen keine gemeinsamen Punkte, aber vier gemeinsame Tangenten haben.

Von den sechs Schnittpunkten der Kreistangenten von k_1 und k_2 liegen zwei auf der Verbindungsgeraden $s_{12} = M_1M_2$, wir nennen sie I_{12} und A_{12} .

Ebenso gibt es die Schnittpunkte I_{23} und A_{23} sowie I_{31} und A_{31} .

Dann liegen je drei dieser sechs Ähnlichkeitszentren auf vier Geraden:

$$A_{12}A_{23}A_{31} = g_A, \quad A_{12}I_{23}I_{31} = g_3,$$

$$A_{23}I_{31}I_{12} = g_1, \quad A_{31}I_{12}I_{23} = g_2.$$

Gegeben sind drei Kegelschnitte k_1, k_2, k_3 mit dem Nahpunkt als gemeinsamem Brennpunkt und den Leitlinien m_1, m_2, m_3 . Sie liegen so, dass je zwei von ihnen keine gemeinsamen Tangenten, aber vier gemeinsame Punkte haben.

Von den sechs Verbindungsgeraden der Kreispunkte von k_1 und k_2 gehen zwei durch den Schnittpunkt $S_{12} = m_1m_2$, wir nennen sie i_{12} und a_{12} .

Ebenso gibt es die Geraden i_{23} und a_{23} sowie die Geraden i_{31} und a_{31} .

Dann gehen je drei dieser sechs Ähnlichkeitsgeraden durch vier Punkte:

$$a_{12}a_{23}a_{31} = G_a, \quad a_{12}i_{23}i_{31} = G_3,$$

$$a_{23}i_{31}i_{12} = G_1, \quad a_{31}i_{12}i_{23} = G_2.$$

In Abb. 47 ist von den beiden durch ein Ähnlichkeitszentrum gehenden Tangenten der Übersichtlichkeit wegen jeweils nur eine dargestellt. Die äußeren Ähnlichkeitspunkte A_{ik} liegen jeweils auf demjenigen Segment der Geraden s_{ik} , in dem auch der Fernpunkt liegt.

Entsprechend liegen in Abb. 48 die äußeren Ähnlichkeitsgeraden jeweils in demjenigen Segment des Geradenbüschels (S_{ik}) , in dem auch der Nahstrahl liegt.

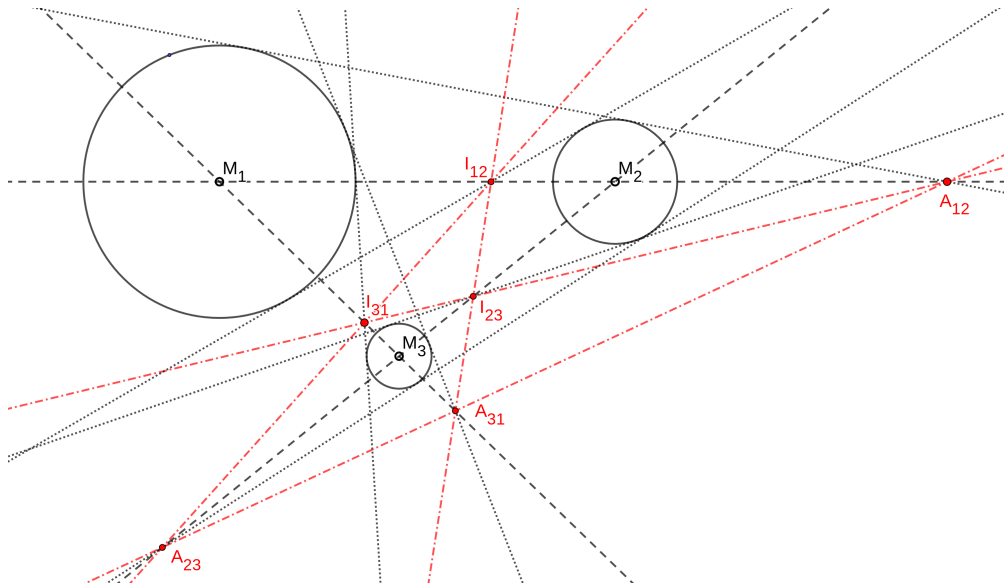


Abbildung 47: Sechs Ähnlichkeitszentren

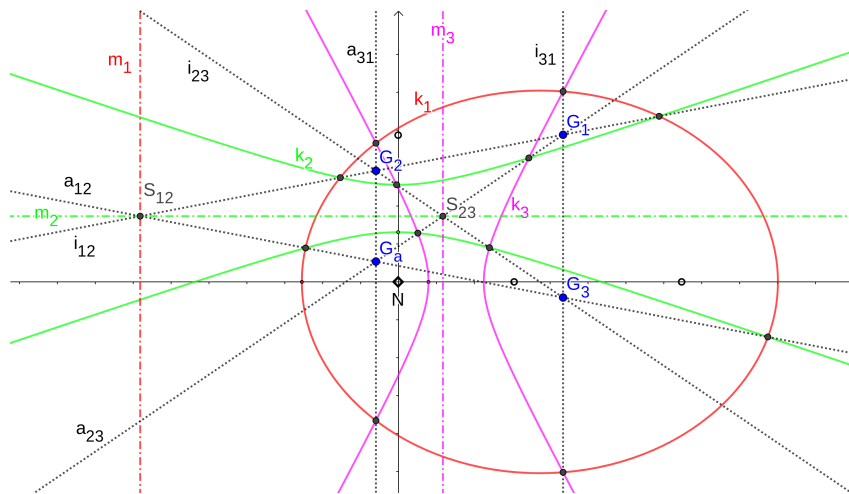


Abbildung 48: Sechs Ähnlichkeitslinien

Bemerkung 13. Sind in Abb. 47 r_1 und r_2 die Radien der beiden Kreise k_1 und k_2 , so ist

$$\frac{\overline{M_1 I_{12}}}{\overline{I_{12} M_2}} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{M_1 A_{12}}}{\overline{A_{12} M_2}} = -\frac{r_1}{r_2}$$

d.h. es ist

$$DV(M_1 M_2 I_{12} A_{12}) = -1 \quad DV(M_2 M_3 I_{23} A_{23}) = -1 \quad DV(M_3 M_1 I_{31} A_{31}) = -1$$

und die jeweiligen vier Punkte haben harmonische Lage.

Entsprechend ist in Abb. 48

$$DV(m_1 m_2 i_{12} a_{12}) = -1 \quad DV(m_2 m_3 i_{23} a_{23}) = -1 \quad DV(m_3 m_1 i_{31} a_{31}) = -1$$

3.15 Abbildungen

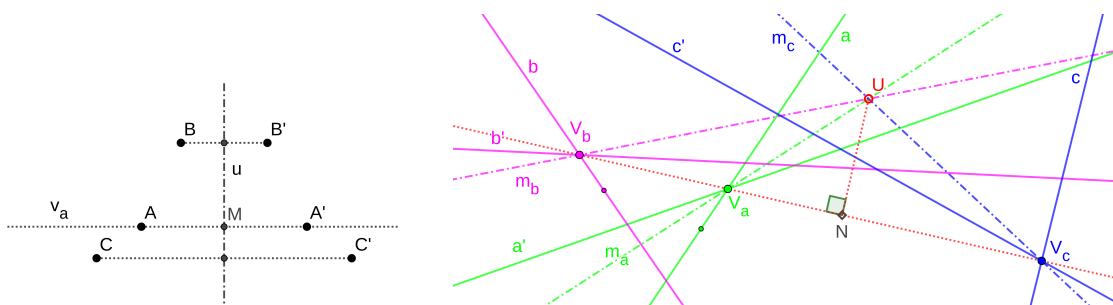


Abbildung 49: Achsenspiegelung und Zentralspiegelung

Achsenspiegelung

Gegeben ist eine Gerade u als Achse und ein Punkt A .

Dann gibt es genau einen Punkt A' mit der Eigenschaft: Die Geraden u und $v_A = AA'$ sind orthogonal und inzidieren im Mittelpunkt von A und A' . Man nennt A' das Spiegelbild von A in Bezug auf u (Abb. 49 links).

Zentralspiegelung

Gegeben ist ein Punkt U als Zentrum und eine Gerade a .

Dann gibt es genau eine Gerade a' mit der Eigenschaft: Die Punkte U und $V_a = aa'$ sind orthogonal und inzidieren in dem Mittelstrahl von a und a' . Wir nennen a' das harmonische Spiegelbild von a in Bezug auf U (Abb. 49 rechts).



Abbildung 50: Punkt- und Geradenspiegelung

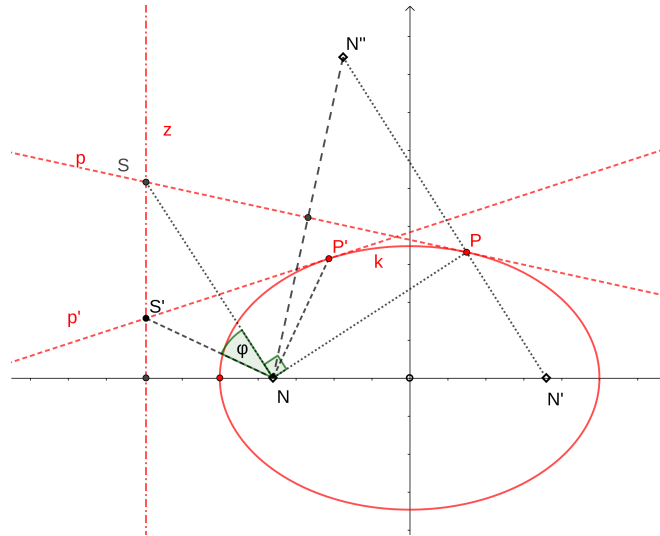


Abbildung 51: Schabung

Punktspiegelung

Gegeben ist ein Punkt Z als Zentrum und ein Punkt A . Dann gibt es in der Geraden $v = AZ$ genau einen Punkt A' mit der Eigenschaft: Z ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AA'}$. Man nennt A' das Spiegelbild von A in Bezug auf Z (Abb. 50 links).

Geradenspiegelung

Gegeben ist eine Gerade z als Achse und eine Gerade a . Dann gibt es in dem Schnittpunkt $V = az$ genau eine Gerade a' mit der Eigenschaft: z ist der Mittelstrahl des Fächers $\overline{aa'}$. Wir nennen a' das harmonische Spiegelbild von a in Bezug auf z (Abb. 50 rechts).

Drehung

Bei einer Drehung wandert ein Punkt auf einem Kreis, und seine Verbindungsgerade mit dem Mittelpunkt Z dreht sich um Z .

Es sei das Drehzentrum Z , der Drehwinkel φ mit Drehsinn und ein Punkt P gegeben. Dann gibt es einen durch P gehenden Kreis k mit dem Mittelpunkt Z (und der Ferngerade als Leitlinie) und genau einen Punkt P' auf k , so dass $\sphericalangle PZP' = \varphi$ ist.

Schabung (Abb. 51)

Bei einer Schabung gleitet eine Tangente auf einem Kegelschnitt und ihr Schnittpunkt mit der Leitgeraden z wandert auf z .

Es sei die Leitgerade z , der Drehwinkel φ mit Drehsinn und eine Gerade p gegeben. Dann gibt es eine die Gerade p berührenden Kegelschnitt k mit der Leitgeraden z (und dem Nahpunkt als Brennpunkt) und genau eine k berührende Gerade p' , so dass $\sphericalangle pzp' = \varphi$ ist.

Die Abb. 51 bedarf noch einer Erläuterung. Wie wird der Kegelschnitt k konstruiert?

Da die Geraden z und p und der Nahpunkt N als Brennpunkt gegeben sind, ist auch die Hauptachse als durch N gehende Orthogonale zur Leitlinie z bestimmt. Die Tangente p schneidet die Leitlinie z im Punkt S . Den Berührungspunkt P der Tangente p erhält man als Schnittpunkt von p mit der durch N gehenden Orthogonalen zur Geraden NS . Die Verbindungsgerade des Spiegelpunktes von N in Bezug auf p mit P schneidet die Hauptachse im zweiten Brennpunkt N' . Damit hat man die konstante Summe $2a$ der Brennstrahlen. Durch den gegebenen Drehwinkel φ mit Drehsinn (hier gegen den Uhrzeigersinn) erhält man den Schnittpunkt S' der Tangente p' mit der Leitlinie z und damit auch den zu NS' orthogonalen Brennstrahl von P' , mit dem man P' konstruieren kann. Dann ist schließlich $p' = P'S'$.

4 Ausblick

Bei der Dualisierung von Sätzen der PEG hängt die Visualisierung entscheidend davon ab, an welcher Stelle der Figur sich der Nahpunkt befindet. Möglicherweise ergeben sich für spezielle Lagen neue Erkenntnisse.

In der Ebene ist eine Polarität durch die Zuordnung eines Vierecks in allgemeiner Lage zu einem Vierseit in allgemeiner Lage eindeutig bestimmt. Ist in einem Dreieck ABC die Polare einer Ecke jeweils die gegenüber liegende Seite, so nennt man das Dreieck selbstpolar, und mit einem vierten

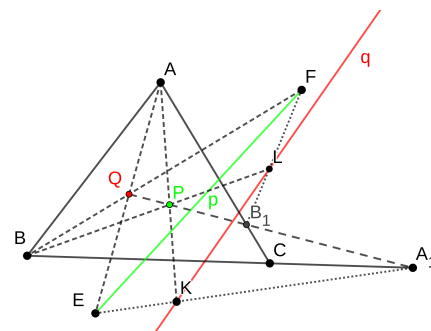


Abbildung 52: Konstruktion der Polaren

Pol-Polare-Paar (Pp) kann man zu einem beliebigen Punkt Q seine Polare q nach COXETER⁶ konstruieren (Abb. 52). Man bezeichnet eine solche Polarität mit $(ABC)(Pp)$.

Gibt es einen Punkt, der mit seiner Polaren inzidiert, so gibt es unendlich viele solcher Elemente, die alle auf einem Kegelschnitt liegen, und die Polarität heißt hyperbolisch. Gibt es keinen solchen Punkt, heißt die Polarität elliptisch. Dies ist der Fall, wenn P in demjenigen Dreiecksgebiet liegt, das von der Polaren p nicht durchdrungen wird.

Wie man zu einer hyperbolischen Polarität $(ABC)(Pp)$ den zugehörigen Kegelschnitt konstruieren kann, hat STOLZENBURG in einem Artikel „Polaritäten und Kegelschnitte“ beschrieben.⁷

Jede Ellipse und jede Hyperbel mit dem Mittelpunkt als Nahpunkt kann Polarisator einer Polarität sein. Allerdings sind solche Polaritäten nicht winkeltreu und die Orthogonalität ist somit keine Invariante der Polarität. Dadurch gehen wesentliche Zusammenhänge, die bei der Polarität am Einheitskreis entstehen, verloren.

⁶H.S.M. Coxeter: Reelle projektive Geometrie der Ebene, München 1955, S. 67

⁷<https://www.forschung-waldorf.de/service/downloadbereich/detail/projektive-geometrie-9/>

Die Parabel kommt als Polarisator nicht in Betracht, da der Pol der Ferngerade ein Fernpunkt ist, der Nahpunkt aber kein Fernpunkt sein darf.

In einer Desargues-Figur gehört zu jedem der 10 Punkte als Zentrum genau eine der 10 Geraden als Achse. Dadurch ist ebenfalls eine Polarität definiert.

Wenn man irgend vier Punkten eines Kegelschnitts k_1 irgend vier Tangenten eines Kegelschnitts k_2 zuordnet, wird dadurch eine Polarität bestimmt, die jeden Kegelschnitt des durch die vier Punkte definierten Kegelschnittbüschels in genau einen Kegelschnitt des durch die vier Tangenten definierten Kegelschnittbüschels abbildet. Durch Verschiebung der Punkte oder Tangenten ergibt sich immer eine andere Polarität. Eine von ihnen wird dann vermutlich auch k_1 in k_2 abbilden.

Die harmonische Grundfigur enthält sowohl ein vollständiges Viereck als auch ein vollständiges Vierseit – und etliche Kegelschnitte. Durch die Zuordnung des Vierecks zum Vierseit wird ebenfalls eine Polarität bestimmt, die es vielleicht verdient, genauer untersucht zu werden.⁸

5 Anhang

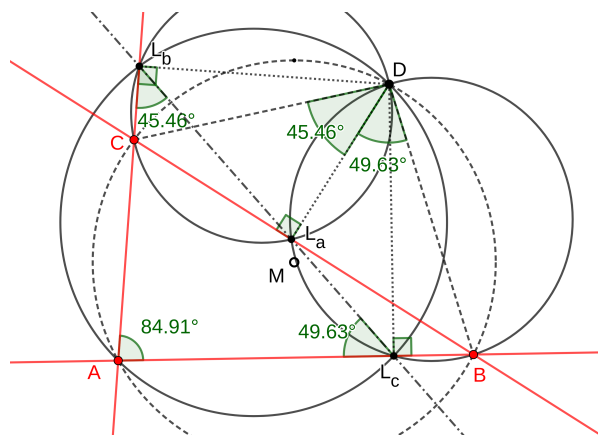


Abbildung 53: Wallace-Gerade

Satz von Wallace:

Satz. *Ist D ein Punkt auf dem Umkreis eines Dreiecks ABC , dann liegen die Lotfußpunkte der Lote von D auf die Dreiecksseiten in einer Geraden.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass L_a auf der Geraden L_bL_c liegt, dass also $\sphericalangle CL_bL_a + \sphericalangle L_aL_cA + \sphericalangle BAC = 180^\circ$ ist (Abb. 53).

⁸Einige Arbeiten zu dem Thema wie auch den Artikel von Alexander Stolzenburg findet man unter <https://www.forschung-waldorf.de/service/downloadbereich/detail/projektive-geometrie-9/>

Im Kreisviereck CL_bDL_a folgt aus dem Satz vom Peripheriewinkel $\sphericalangle CL_bL_a = \sphericalangle CDL_a$, und im Kreisviereck DBL_cL_a ist $\sphericalangle L_aDB + \sphericalangle BL_cL_a = 180^\circ$, daher ist $\sphericalangle L_aL_cA = \sphericalangle L_aDB$ wegen $\sphericalangle L_aL_cA + \sphericalangle BL_cL_a = 180^\circ$. Somit ist

$$\begin{aligned}\sphericalangle CL_bL_a + \sphericalangle L_aL_cA + \sphericalangle BAC &= \sphericalangle CDL_a + \sphericalangle L_aDB + \sphericalangle L_cAC \\ &= \sphericalangle CDB + \sphericalangle BAC \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

wegen des Kreisvierecks ACDB. □

Satz von Gauß:

Satz. Gegeben sei ein Dreieck abc mit den Ecken A, B, C und einer Geraden d , die durch keine Ecke geht. Die Schnittpunkte von d mit den Seiten seien $P_a = ad$, $P_b = bd$, $P_c = cd$. Es sei P der Mittelpunkt von AP_a , Q der Mittelpunkt von BP_b und R der Mittelpunkt von CP_c . Dann liegen die drei Mittelpunkte P, Q, R auf einer Geraden.

Beweis. In Abb. 54 sind M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der Dreieckseiten a, b und c . Dann liegen die Punkte

- M_a, M_b, R auf einer Parallelen zu $AB = c$
- M_b, M_c, P auf einer Parallelen zu $BC = a$
- M_c, M_a, Q auf einer Parallelen zu $CA = b$

Die Gerade PQ ist eine Transversale des Dreiecks $M_aM_bM_c$ und geht nach dem Satz des Menelaos genau dann durch R , wenn $\frac{M_aR}{RM_b} \cdot \frac{M_bP}{PM_c} \cdot \frac{M_cQ}{QM_a} = -1$ ist. Nun ist aber wegen der ähnlichen Dreiecke $\triangle M_aCR \sim \triangle BCP_c$ auch $\frac{M_aR}{RM_b} = \frac{BP_c}{P_cA}$. Mit der gleichen Argumentation folgt $\frac{M_bP}{PM_c} = \frac{CP_a}{P_aB}$ und $\frac{M_cQ}{QM_a} = \frac{AP_b}{P_bC}$ und es folgt aus dem Satz des Menelaos für das Dreieck ABC mit der Transversalen $P_aP_bP_c$

$$\frac{M_aR}{RM_b} \cdot \frac{M_bP}{PM_c} \cdot \frac{M_cQ}{QM_a} = \frac{BP_c}{P_cA} \cdot \frac{CP_a}{P_aB} \cdot \frac{AP_b}{P_bC} = -1$$

□

Satz von Bodenmiller im hyperbolischen Fall:

Satz. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck mit den Seiten a, b, c und N ein beliebiger Punkt. Es sei n_A die durch N gehende Orthogonale zur Geraden AN und n_B die durch N gehende Orthogonale zur Geraden BN und n_C die durch N gehende Orthogonale zur Geraden CN . Es seien $H_a = an_A$, $H_b = bn_B$ und $H_c = cn_C$ die Schnittpunkte der Orthogonalen mit den Dreieckseiten. Dann gehören die Umkreise der drei rechtwinkligen Dreiecke ANH_a , BNH_b und CNH_c einem hyperbolischen Kreisbüschel mit einer gemeinsamen Chordale an .

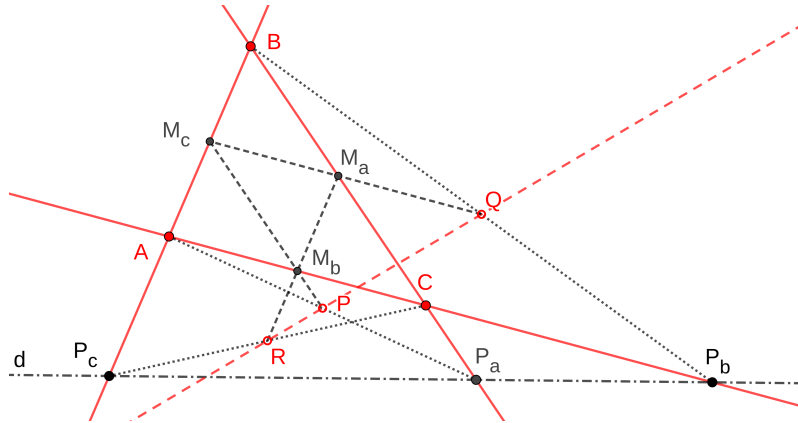


Abbildung 54: Gauß (Beweis)

Beweis. Nach dem dualen Höhensatz liegen die drei Punkte H_a , H_b und H_c auf einer Geraden h , daher liegen nach dem Satz von Gauß die drei Mittelpunkte der Hypotenusen AH_a , BH_b und CH_c auf einer Geraden. Somit haben die drei Umkreise außer N noch einen zweiten gemeinsamen Schnittpunkt N' und gehören einem hyperbolischen Kreisbüschel an mit der gemeinsamen Chordalen NN' . \square

Bemerkung 14. Liegt N auf der Seite a , dann sind die durch N gehenden Orthogonalen n_B und n_C identisch. Da auf ihnen auch die Punkte H_b und H_c liegen, ist auch die Transversale h mit n_B und n_C identisch und es ist $H_a = N$. Entsprechendes gilt, wenn N auf der Seite b oder c liegt.

Ist $N = A$, dann ist die Gerade AN unbestimmt und damit auch die Orthogonale n_A , der Punkt H_a und der Umkreis ANH_a . Es existieren jedoch die Orthogonalen n_B und n_C und es ist $H_B = H_C = A$ und somit haben die beiden anderen Umkreise die Durchmesser AB und AC . Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte ist parallel zur Seite a und die Chordale ist die Höhe h_a im Dreieck ABC .

Satz von Bodenmiller-Steiner:⁹

Satz. *Es sei $abcd$ ein Viereck in allgemeiner Lage. Wir fassen die Seite d als Transversale des Dreiecks abc mit den Ecken A, B, C auf. Die Schnittpunkte von d mit dem Dreieck seien $P_a = ad$, $P_b = bd$ und $P_c = cd$. Dann gehören die drei Kreise k_A, k_B, k_C mit den Durchmessern AP_a, BP_b, CP_c und den zugehörigen Mittelpunkten M_A, M_B, M_C einem hyperbolischen oder elliptischen Kreisbüschel mit einer gemeinsamen Chordale an.*

⁹Rudolf Fritsch hat unter dem Titel „Gudermann, Bodenmiller und der Satz von Bodenmiller-Steiner“ in DdM 3, 1992 (165 - 187) eine umfassende Untersuchung mit historischen Aspekten vorgelegt. Er hat aber den Satz nur mit Hilfsmittel der Vektorrechnung bewiesen. Er zitiert dort einen Satz von Steiner: *Die Höhenschnittpunkte der vier durch ein vollständiges Viereck bestimmten Dreiecke sind kollinear; sie liegen auf der Potenzgerade des Vierecks.* Angeblich steht er in *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander*. Dort habe ich ihn aber nicht gefunden.

Die Idee zu dem hier vorgelegten Beweis findet man in Aumann: *Kreisgeometrie*, Springer Spectrum 2015.

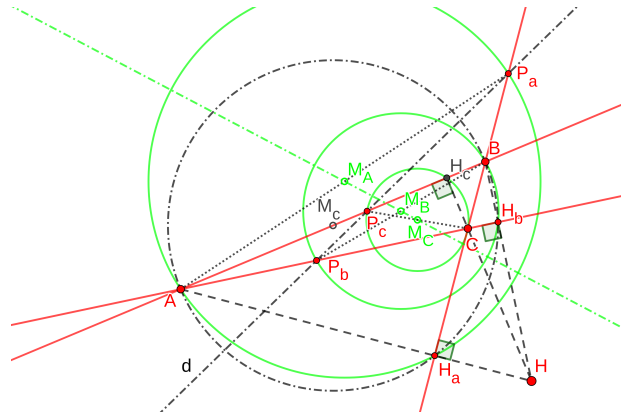


Abbildung 55: Höhenpunkt liegt auf Chordale

Beweis. Nach dem Satz von Gauß (Satz auf Seite 52) liegen die Mittelpunkte M_A , M_B , M_C der drei Kreise k_A , k_B , k_C auf einer Geraden m . Es ist noch zu zeigen, dass sie eine gemeinsame Chordale besitzen.

Dies ist aber der Fall, da der Höhenschnittpunkt H in Bezug auf alle drei Kreise dieselbe Potenz p besitzt (Abb. 55). Denn wegen der rechten Winkel bei H_a und H_b ist ABH_aH_b ein Kreisviereck, und somit ist nach dem Sekantensatz in seinem Umkreis $p = |HA| \cdot |HH_a| = |HB| \cdot |HH_b|$. Da die Punkte A und H_a auch auf k_A und die Punkte B und H_b auch auf k_B liegen, ist p auch die Potenz von H in Bezug auf k_A und k_B . Ebenso folgt mit dem Umkreis des Kreisvierecks ACH_aH_c , dass $p = |HA| \cdot |HH_a| = |HC| \cdot |HH_c|$ ist. Somit liegt H auf der gemeinsamen Chordale der drei Kreise, und diese ist die durch H gehende Orthogonale zu m . \square