Polaritäten und Kegelschnitte

Alexander Stolzenburg
21.07.2022

Einführung

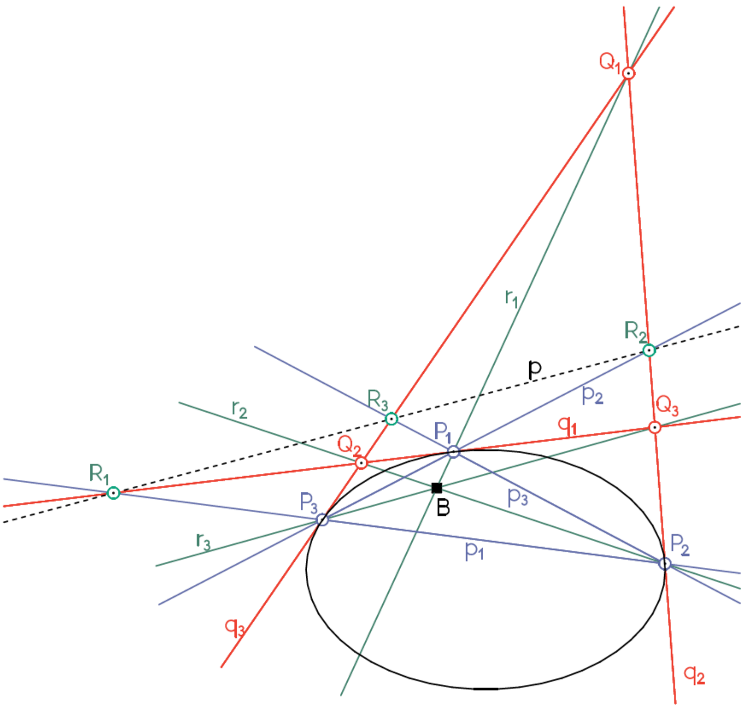
Wohlbekannt ist, dass eine involutorische Korrelation (oder „Polarität“), sofern sie hyperbolisch ist, genau einen „Kernkegelschnitt“ besitzt, für den die zugeordneten Elemente Pol und Polare sind. Kegelschnitte können sogar definiert werden als Ort aller Punkte (und Geraden), für die die zugeordneten Elemente der Polarität inzidieren. Vieles dazu findet sich bei COXETER, aber nicht die Konstruktion der Kegelschnitte.
Dass man auch die elliptischen Polaritäten, die die einen nullteiligen Kernkegelschnitt besitzen, durch einen reellen Kegelschnitt repräsentieren kann, soll zuletzt auch noch gezeigt werden.

Ein Satz über polare Dreiecke

Ausgangspunkt sind die aus den Sätzen von PASCAL und BRIANCHON folgenden Sätze über einem Kegelschnitt k ein- und umbeschriebene Dreiecke bzw. Dreiseite [Sto, S. 94], hier zusammengefasst in einer Zeichnung:

Ist einem Kegelschnitt ein Dreieck einbeschrieben, dann liegen die Schnittpunkte der drei Seiten mit den Tangenten der je gegenüberliegenden Ecke in <u>einer</u> Geraden p.	Ist einem Kegelschnitt ein Dreiseit umbeschrieben, dann gehen die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Berührpunkten der je gegenüberliegenden Seite durch <u>einen</u> Punkt B.

Aus der zusammenfassenden Zeichnung wird sofort deutlich, dass dann BRIANCHON'scher Punkt B und PASCAL'sche Gerade p Pol und Polare bezüglich k sind.



<u>Bew.</u>: Die Existenz der Elemente p und B folgen aus dem Satz von PASCAL bzw. dem von BRIANCHON. Es bleibt zu zeigen, dass sie Pol und Polare bezüglich k sind.

Nun liegt $R_i = p_i \cdot q_i$ in der Polare q_i von P_i, also sind R_i und P_i konjugierte Punkte, und genauso sind R_i und Q_i konjugiert. Damit sind die Geraden $r_i = \overline{P_iQ_i}$ polar zu den R_i. Aus dem Hauptsatz de Polarentheorie folgt, dass $R_1R_2R_3 = p$ polar ist zu $B = r_1r_2r_3$. **qeδ**

Dieser Satz lässt sich verallgemeinern für den Fall, dass Berührpunkte und Tangenten ganz oder teilweise ersetzt werden durch Pole und Polaren. Dazu muss man Polaritäten zugrunde legen.

Polaritäten

Eine „Korrelation“ in der Ebene ist eine inzidenztreue Abbildung von Punkten in Geraden und umgekehrt von Geraden in Punkte

Satz: Eine ebene Korrelation κ ist eindeutig bestimmt durch vier Punkte, von denen keine drei kollinear sind, und vier zugeordnete Geraden, von denen keine drei kopunktal sind.

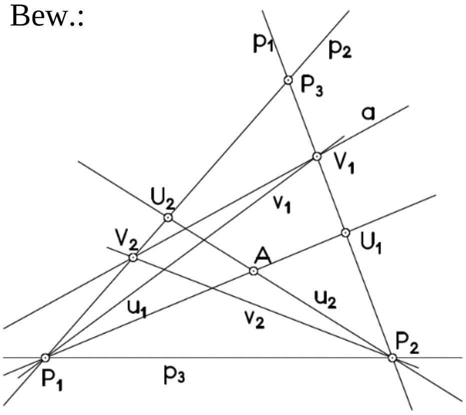
Bew.: Seien (für i = 1, …, 4) die gegebenen Punkte P_i und p_i die zugeordneten Geraden, ferner π eine beliebige hyperbolische Polarität, etwa an irgendeinem Kegelschnitt, mit den Polen $Q_i = \pi(p_i)$. Dann sind auch keine drei dieser Pole kollinear. Nach dem Fundamentalsatz der Projektiven Geometrie gibt es eine eindeutig bestimmte Kollineation κ* mit $\kappa^*(P_i) = Q_i$. Dann leistet $\kappa = \pi\circ\kappa^*$ das Gewünschte: $\kappa(P_i) = \pi\circ\kappa^*(P_i) = \pi(Q_i) = p_i$.
κ ist die einzige Abbildung mit dieser Eigenschaft, denn für eine andere, etwa κ_2, wäre $\kappa_2^{-1}\circ\kappa(P_i) = \kappa_2^{-1}(p_i) = P_i$ (i = 1, …,4) und $\kappa_2^{-1}\circ\kappa$ die Identität; also ist $\kappa_2 = \kappa$. **qeδ**

Der Beweis wird hier gegeben, da die Gültigkeit des Fundamentalsatzes in [Sto] für Korrelationen behauptet, aber nicht bewiesen wird.

Wir beschränken uns im Weiteren auf die involutorischen Korrelationen, kurz "Polaritäten", bei denen das Bild des Bildes wieder das Original ist. Bekanntlich spricht man hier von Pol und Polare.

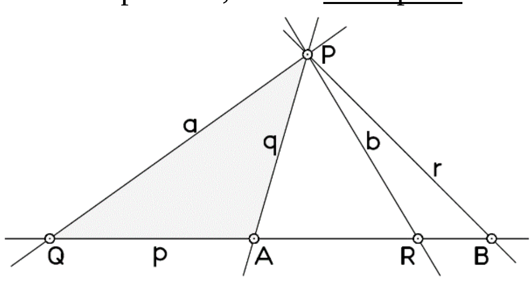
Satz: Jede Korrelation, bei der die Ecken eines Dreiecks und die gegenüberliegenden Seiten einander entsprechen, ist eine Polarität.

Bew.:



Seien $P_1P_2P_3$ die Ecken und $p_1p_2p_3$ die Seiten des gegebenen Dreiecks und A ein Punkt, der mit keiner der Seiten inzidiert. Dann geht die in der Korrelation κ zugeordnete Gerade a durch keine der Ecken. κ ist nach dem vorigen Satz eindeutig bestimmt.
Zu zeigen ist, dass auch a nach A abgebildet wird. Den Punkten U von p_1 werden die Geraden u in P_1 zugeordnet, speziell dem Punkt $U_1 = \overline{P_1A}\cdot p_1$ die Gerade $\overline{(p_1\cdot a)P_1} = \overline{V_1P_1} = v_1$. In dieser Projektivität in p_1 sind P_2 und P_3 einander wechselseitig zugeordnet (man wähle $u = p_2$ bzw. p_3) – also auch U_1, V_1. Genauso: U_2, V_2.
Damit ergibt κ die Zuordnungen $V_1 \to u_1$, $V_2 \to u_2$, also $a = \overline{V_1V_2} \to u_1\cdot u_2 = A$. **qeδ**

Ein Dreieck, dessen Ecken den gegenüberliegenden Seiten entsprechen, heißt "selbstpolar".
Ein solches kann man sich für jede Polarität leicht verschaffen. Seien nämlich (A,a), (B,b) zwei Paare einander zugeordneter Elemente, dann gelten die Entsprechungen: A ↔ a nach Voraussetzung und weiter $P = a\cdot b \leftrightarrow \overline{AB} = p$ und $Q = a\cdot p \leftrightarrow \overline{AP} = q$.
APQ ist ein selbstpolares Dreieck.
Ein zweites ist BPR mit $R = b\cdot p$ und $r = \overline{BP}$.



Das heißt: Wenn in einer Korrelation zwei Paare (A,a), (B,b) wechselseitig zugeordneter Elemente existieren, dann ist dadurch mindestens ein selbstpolares Dreieck bestimmt.

Aus dem Beweis des letzten Satzes geht hervor, dass eine Polarität eindeutig bestimmt ist durch zwei einander zugeordnete Paare von Pol und Polare und zusätzlich noch die Zuordnung von einem Punkt zu einer Gerade (oder dual: der Zuordnung von einer Geraden zu einem Punkt). Dass auch diese letzte Zuordnung involutorisch ist, ist oben gezeigt worden.

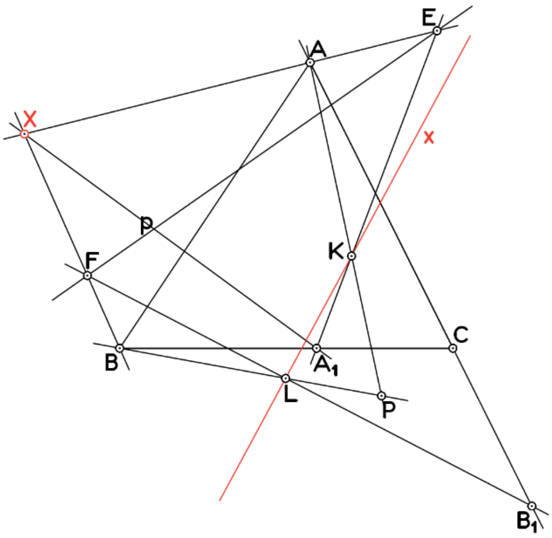
Satz: Eine Polarität ist eindeutig bestimmt durch ein selbstpolares Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein weiteres Paar von Pol A und Polare a, wobei A auf keiner Dreieckseite liegt und a durch keine Ecke geht.
Sie wird hier bezeichnet durch $(P_1P_2P_3)(Aa)$.

Man hat es also mit fünf Zuordnungen zu tun – in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass eine Polarität durch einen Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist und dieser durch fünf Punkte (oder Tangenten). Auch analytisch ist eine Polarität durch fünf wesentliche Elemente einer symmetrischen 3×3-Matrix definiert.

Elementare Konstruktionen

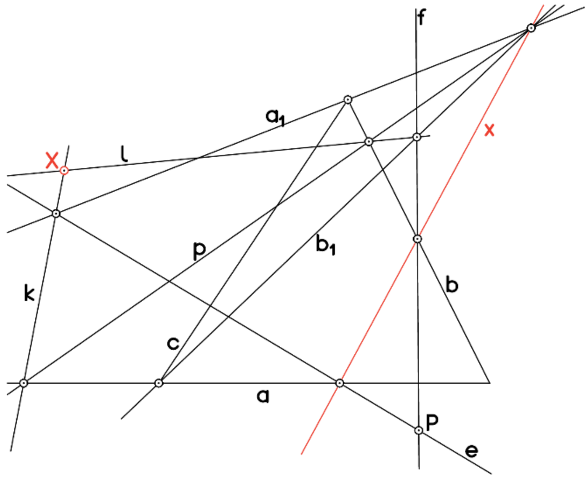
Gegeben sei eine Polarität (ABC)(Pp) sowie ein Punkt X, gesucht die zugeordnete Polare x.

Für $A_1 = a\cdot\overline{PX}$, $E = p\cdot\overline{AX}$, $K = \overline{AP}\cdot\overline{A_1E}$ und $B_1 = b\cdot\overline{PX}$, $F = p\cdot\overline{BX}$, $L = \overline{BP}\cdot\overline{B_1F}$ ist $x = \overline{KL}$.



Gegeben sei eine Polarität (abc)(pP) sowie eine Gerade x, gesucht der zugeordnete Pol X.

Für $a_1 = \overline{A(p\cdot x)}$, $e = \overline{P(a\cdot x)}$, $k = \overline{(a\cdot p)(a_1\cdot e)}$ und $b_1 = \overline{B(p\cdot x)}$, $f = \overline{P(b\cdot x)}$, $l = \overline{(b\cdot p)(b_1\cdot f)}$ ist $X = k\cdot l$.



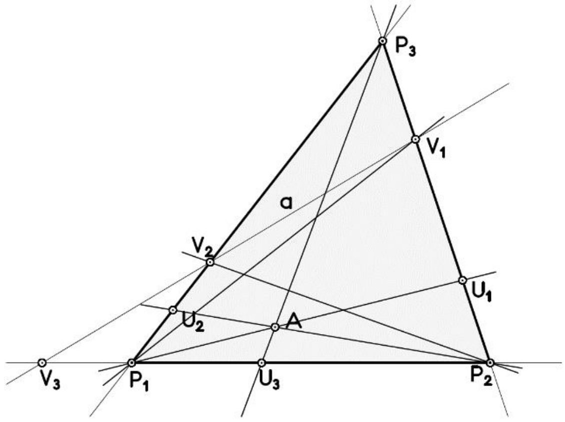
Man hat nun zwischen elliptischen und hyperbolischen Polaritäten zu unterscheiden: Für die ersteren gibt es keine inzidierenden Paare von Pol und Polare, für die letzteren ist das möglich, und wenn für ein Paar, dann auch für unendlich viele. Diese inzidierenden Elemente machen die Punkte bzw. die Tangenten eines Kegelschnitts aus. Es liegt also nahe, für den Umgang mit Polaritäten Kegelschnitte heranzuziehen. Das ist im hyperbolischen Fall leicht möglich – im elliptischen auch, wie noch gezeigt wird.

Die drei Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$, $p_1 = \overline{P_2P_3}$, $p_2 = \overline{P_3P_1}$, $p_3 = \overline{P_1P_2}$ gliedern die Punkte der Ebene in vier 3-seitig begrenzte Gebiete. Jede weitere Gerade (die nicht durch einen der Punkte P_i geht) meidet dann genau eines dieser vier Gebiete [Sto, S. 32f].

Satz: Die Polarität $(P_1P_2P_3)(Aa)$ ist genau dann hyperbolisch, wenn A in einem der Gebiete liegt, die von a passiert werden, sonst elliptisch.

Die Beispiele oben stehen also für eine elliptische Polarität.

Bew.: Die umgrenzenden Strecken (in der Zeichnung betont) des A enthaltenden Gebietes seien mit (+) signiert, die komplementären mit (−). Die Geraden $\overline{P_iA}$ treffen die gegenüberliegende Seite p_i in den Punkten U_i und diese Punkte liegen stets in den (+)-Strecken. Passiere a das Gebiet, in welchem A liegt, dann schneidet a genau 2 Seiten, seien das p_1 und p_2, in den (+)-Strecken, sonst nummeriere man um. Die Schnittpunkte seien $V_i = a \cdot p_i$.



Die Polarität induziert dann in jeder Seite p_i (i = 1, 2) eine Punktinvolution $U_iV_i \bullet P_jP_k$, die die dort vorhandenen Punkte P_j, P_k (j, k ≠ i) und außerdem U_i mit V_i vertauscht. Nach Voraussetzung trennen sich die Paare (U_iV_i), (P_jP_k) nicht, sind diese Involutionen also hyperbolisch und besitzen sie je zwei Fixpunkte X_i, Y_i. Diese wurden hier durch Rechnung ermittelt (s. Anhang).

Die Polarität induziert auch in jeder Ecke P_i (i = 1, 2) eine Geradeninvolution, deren Fixgeraden die Geraden $x_i = \overline{P_iX_i}$ bzw. $y_i = \overline{P_iY_i}$ sind. Dabei sind sich die x_i und y_i den X_i und Y_i in der Polarität einander zugeordnet.

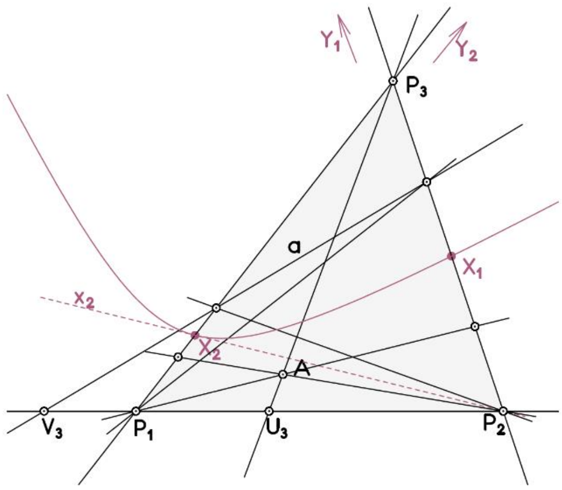
Ist umgekehrt eine Polarität hyperbolisch, dann existiert per definitionem ein Paar zugeordneter Elemente B und b, die inzidieren. Das fragliche Punktgebiet ist dasjenige, welches B im Innern enthält. **qeδ**

Dass auch elliptische Polaritäten existieren, folgt aus Beispielen (s. etwa die elementaren Konstruktionen, S. 3).

Der Beweis zeigt außerdem einen Konstruktionsweg für den Kegelschnitt auf, der die Polarität erzeugt. Aus den Punkten X_i, Y_i und einer der Tangenten x_i, y_i ist der Kegelschnitt konstruierbar.

Die Fixpunkte der induzierten Involutionen bedürfen der Lösungen von Aufgaben 2. Grades. Das kann konstruktiv geschehen oder, wie hier, durch eine kleine Rechnung, die die harmonische Lage der X_i, Y_i zum Ziel hat. (s. Anhang).

Wenn A und a (innerhalb des betrachteten Gebiets) inzidieren, bleiben alle Schlüsse gültig.

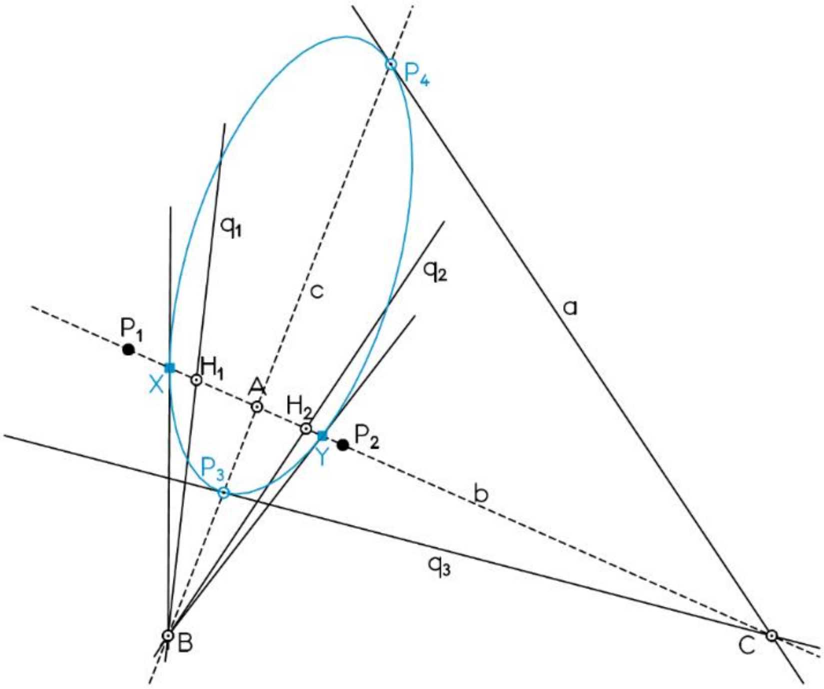


Eine Polarität ist auch bestimmt durch ein selbstpolares Dreieck und einen Punkt, für den nur gefordert ist, dass seine Polare mit ihm inzidiert. Die folgende Konstruktion legt das nahe.

Konstruktion des Kegelschnitts zu zwei Paaren von Pol, Polare und einem weiteren Punkt

Gegeben seien drei Punkte $P_1P_2P_3$ und zwei Geraden q_1q_2.
Gesucht ist der Kegelschnitt, der (P_1, q_1), (P_2, q_2) als Paare von (Pol, Polare) hat und der durch P_3 geht. Dazu muss die noch unbekannte Polare q_3 speziell die Tangente in P_3 sein.

Konstruktion: Zunächst seien $B = q_1 \cdot q_2$, $b = \overline{P_1P_2}$, $c = \overline{P_3B}$, $A = b \cdot c$, $H_1 = q_1 \cdot b$ und $H_2 = q_2 \cdot b$. Falls die Punktepaare (H_1, P_1) und (H_2, P_2) sich trennen, ist die Polarität elliptisch und es gibt keinen solchen Kegelschnitt im Reellen. Hier trennen sich die Paare nicht. Die Aufgabe ist lösbar.

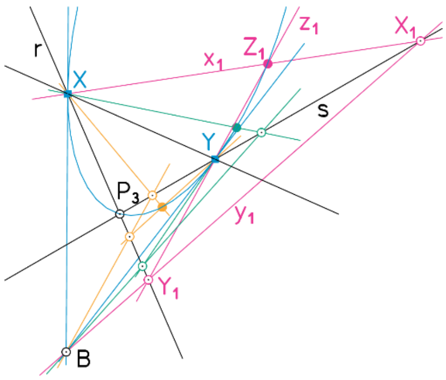


Es werden nun zwei Linienelemente bestimmt, die dem gesuchten Kegelschnitt angehören; eines davon als $P_3{*}q_3$. Ein zweiter Berührpunkt P_4 wird ermittelt als vierter harmonischer Punkt so, dass (P_3, P_4) in c harmonisch zu (A, B) ist. Mit C als viertem harmonischen Punkt zu A bezüglich (P_1, P_2) erhält man in $q_3 = \overline{CP_3}$ die gesuchte Tangente in P_3, außerdem mit $a = \overline{CP_4}$ die Tangente in P_4.

Die Hilfslinien für die Konstruktionen der 4. harmonischen Punkte sind hier wegelassen.

Weiter muss der Kegelschnitt die Polarenbedingungen für (P_1, q_1) und (P_2, q_2) erfüllen. In der Geraden b wird durch die zugrundeliegende Polarität die Punkt-Involution $P_1H_1 \mathbf{.} P_2H_2$ induziert (die H_i und P_i sind konjugiert). In deren Fixpunkten X und Y inzidieren Pole mit ihren Polaren, sprich Tangenten.

Für die Konstruktion der Fixpunkte ist eine Aufgabe 2. Grades zu lösen, in zeichnerischer Form mithilfe des Kreises oder wie hier durch Rechnung (s. Anhang).



Ein schöner Hinweis von Herrn Peter Baum (Kassel): Statt wie oben den Kegelschnitt aus fünf Punkten durch ein Geometrie-Programm zu bestimmen, lässt er sich auch projektiv erzeugen:

Die Zeichnung ist ein Ausschnitt der letzten mit X, Y, P_3. Hinzu kommen $r = \overline{P_3X}$ und $s = \overline{P_3Y}$.

Das Geradenbüschel $X(x_i)$ wird über s auf das Büschel $B(y_i)$ bezogen und dieses dann über r auf das Büschel $Y(z_i)$. Die Punkte $Z_i = x_i \cdot y_i$ beschreiben dann den Kegelschnitt.

Selbstredend ist die duale Aufgabe auf duale Weise zu lösen:

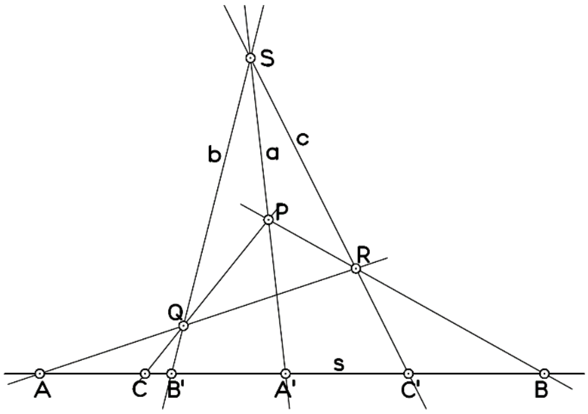
Konstruktion des Kegelschnitts zu zwei Paaren von Pol, Polare und einer weiteren Tangente

Gegeben seien drei Geraden $q_1q_2q_3$ Punkte und zwei P_1P_2. Gesucht ist der Kegelschnitt, der (P_1, q_1), (P_2, q_2) als Paare von (Pol, Polare) hat und der die Gerade q_3 berührt. Dazu muss der noch unbekannte Pol Q_3 speziell der Berührpunkt von q_3 sein.

Für einen späteren Beweis benötigen wir einen auch sonst interessanten Satz von HESSE:

Satz: Wenn in einer Polarität zwei Paare von gegenüberliegenden Ecken eines Vierseits konjugierte Punkte sind, dann ist auch dritte Paar konjugiert.

Satz: Wenn in einer Polarität zwei Paare von gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks konjugierte Geraden sind, dann ist auch das dritte Paar aus konjugiert.



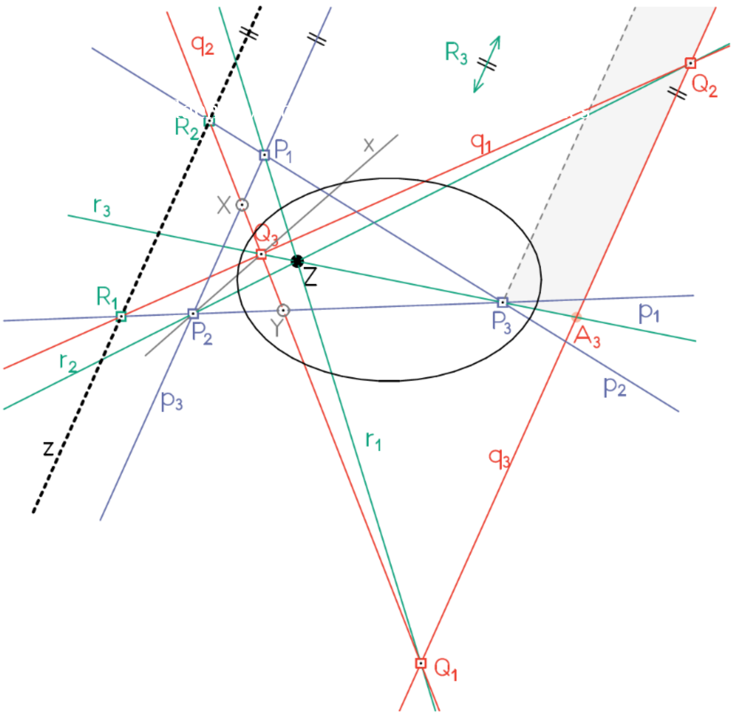
Bew.: Das Vierseit sei abps (in allgemeiner Lage). Mindestens eine Seite (etwa s) ist nicht selbstkonjugiert. Die 3 Ecken A, B, C in s haben dann Polaren a, b, c durch einen gemeinsamen Punkt S. Die Polarität ist dann (ABP)(S,s).

Seien P und A (in a) sowie B und Q (in B) konjugiert. Zu zeigen: Dann auch C und R
S möge nicht in einer der Seiten liegen. Die weiteren drei Ecken seien P, Q, R. Die Seiten in S sind dann a = $\overline{SP}$, b = $\overline{SQ}$, sie treffen s in A', B'. a und b sind die Polaren von A, B nach Voraussetzung. In s ist damit die Involution AA'.BB' gegeben. Nach dem Involutionssatz für das Viereck PQRS gehört das Paar CC' derselben Involution an. Also ist auch c Polare von C und damit R (in c) konjugiert zu C. **qeδ**

Polaritäten und die DESARGUES'sche Konfiguration

Satz: (CHASLES) In jeder Polarität bilden ein beliebiges Dreieck $P_1P_2P_3$ (mit drei verschiedenen Seiten $p_1p_2p_3$ und das dazu polare Dreiseit $q_1q_2q_3$ (mit den verschiedenen Ecken $Q_1Q_2Q_3$) eine DESARGUES'sche Konfiguration.
Die übrigen Elemente $R_i = p_i \cdot q_i$, $r_i = \overline{P_iQ_i}$ (i = 1, 2, 3) sowie $Z = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$, $z = \overline{R_1R_2R_3}$ sind ebenfalls zueinander polar.

Bew:



Eine Bemerkung vorweg:
Ein selbstpolares Dreieck ist $P_3R_3A_3$ mit $A_3 = r_3 \cdot q_3$;
z.B. $(P_3R_3A_3)(P_1q_1)$ ist diese Polarität. Sie ist in diesem Fall hier hyperbolisch, weil P_1 in einem der Gebiete (links-oben rechts-unten) liegt, die von q_1 getroffen werden.

Zu zeigen: R_1, R_2, R_3 sind kollinear (dann sind nach DESARGUES auch die r_1, r_2, r_3 kopunktal).
Sei $X = p_3 \cdot q_2$, $Y = p_1 \cdot q_2$ und $x = \overline{Q_3P_2}$ die Polare von X in der gegebenen Polarität.
Dann sind projektiv:

$R_3P_1XP_2$	$\barwedge$ $P_1R_3P_2X$		paarweise Vertauschung in p_3 [Sto, S. 62].
	$\barwedge$ $q_1r_3q_2x$		in Q_3 wegen der Polarität, mit $R_3 = p_3 \cdot q_3 \leftrightarrow \overline{Q_3P_3} = r_3$.
	$\overline{\barwedge}$ $R_1P_3YP_2$		Schnitt mit p_1
R_3P_1X	$\overline{\barwedge}$ R_1P_3Y		P_2 ist beiden Quadrupeln gemeinsam, [Sto, S. 64f].

$\overline{P_1P_3} = p_2$, $\overline{XY} = q_2$ gehen durch einen Punkt (R_2), also geht auch $\overline{R_3R_1}$ durch R_2. **qeδ**

Es gilt auch umgekehrt:

Satz: Jede DESARGUES'sche Konfiguration, deren perspektive Dreiecke verschiedene Ecken haben, stiftet eine Polarität, welche die Dreiecke aufeinander bezieht.

Bew.: Da die Dreiecke in perspektiver Lage sind mit Z und z als Perspektivitätszentrum bzw. -achse, gibt es eine Zentralkollineation ζ (mit Zentrum Z und Achse z), die das Dreieck $P_1P_2P_3$ punkt- und geradenweise auf $Q_1Q_2Q_3$ abbildet. Sei nun π_0 eine Polarität, die die Ecken $Q_1Q_2Q_3$ mit den gegenüberliegenden Seiten vertauscht $q_1q_2q_3$, dann ist $\pi = \pi_0 \circ \zeta$ eine Polarität, die das Verlangte leistet. **qeδ**

Konstruktion eines Kegelschnitts aus 3 Paaren von Pol und Polare

Bemerkung 1: Das ist nur möglich, wenn das Dreieck aus den Polen und das aus den Polaren in perspektiver Lage sind.

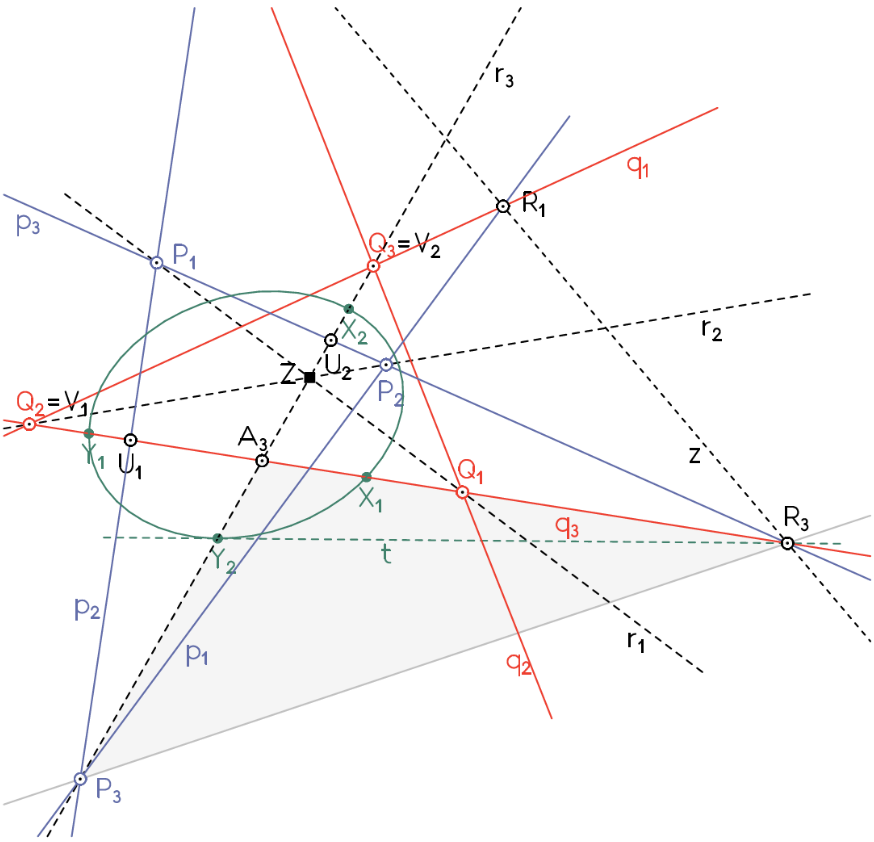
Bemerkung 2: Damit ist zugleich die Festlegung einer Polarität verbunden, die für ein Dreieck die Ecken mit den Seiten vertauscht.

Bemerkung 3: Es ist möglich, dass die Polarität elliptisch ist, dann existiert kein reeller Kegelschnitt, aber ein nullteiliger (s.u.).

Gegeben sei das Dreieck $P_1P_2P_3$ und das polare Dreieck $Q_1Q_2Q_3$. Dabei sollen die Geraden $r_i = \overline{P_iQ_i}$ durch <u>einen</u> Punkt Z gehen. Die Punkte $R_i = p_i \cdot q_i$ liegen dann in <u>einer</u> Gerade z.

Mit $A_3 = r_3 \cdot q_3$ ist die Polarität $(P_3R_3A_3)(P_1q_1)$ beschrieben mit dem selbstpolaren Dreieck $P_3R_3A_3$ mit q_3 und r_3 als Seiten. q_1 passiert das Gebiet, in welchem P_1 liegt (oben-links und unten-rechts); mithin ist der Kegelschnitt reell.

Mit den Bezeichnungen von S. 4: $A = P_1$, $a = p_1$, $U_1 = \overline{P_3R_3} \cdot q_3$, $U_2 = \overline{P_1R_3} \cdot r_3$, $V_1 = q_1 \cdot q_3$, $V_2 = q_1 \cdot r_3$ gilt gemäß dem Beweis, S. 4:
In der Gerade q_3 wird die Involution $R_3A_3 \bullet U_1V_1$ induziert und in r_3 die Involution $P_3A_3 \bullet U_2V_2$ und außerdem eine Geradeninvolution in R_3.



Weil sich die Paare der Involutionen nicht trennen, existieren die (reellen) Fixpunkte X_i, Y_i, in denen Pol und Polare zusammenfallen. Der die Polarität erzeugende Kegelschnitt ist damit konstruierbar aus vier Punkten und einer Tangente, z.B. $\overline{R_iX_i}$.

Polare bei einem nullteiligen Kegelschnitt

Für eine elliptische Polarität gibt es keinen sie vermittelnden Kegelschnitt, wurde oben formuliert. Die Analytische Geometrie aber zeigt, dass es doch einen gibt, einen „nullteiligen“; die Koordinaten seiner Punkte und Geraden sind samt und sonders imaginär. Aber auch dann ist die Polare für einen reellen Pol wieder reell.

Die Lineare Algebra lehrt, dass jeder gegebene nicht-zerfallende nullteilige Kegelschnitt k – in einem geeignet gewählten Koordinatensystem − die Gleichung $\mathbf{x}^\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = 0$ hat für eine reguläre symmetrische Diagonalmatrix **A** bzw. die zugehörige Koordinatengleichung

$$k \ldots a_{00}\cdot x_0^2 + a_{11}\cdot x_1^2 + a_{22}\cdot x_2^2 = 0,\ a_{kk} \neq 0 \text{ für } k = 0, 1, 2.$$

Die Polare von P(**p**) für $\mathbf{p} = (p_0\ \ p_1\ \ p_2)^T$ hat die Gleichung

$$a_{00}\cdot p_0\cdot x_0 + a_{11}\cdot p_1\cdot x_1 + a_{22}\cdot p_2\cdot x_2 = 0$$

Wenn die Matrix **A** definit ist, also etwa $a_{kk} > 0$ für k = 0, 1, 2, ist der Kegelschnitt nullteilig. Wenn man nun einfach a_{00} durch $-a_{00}$ ersetzt, erhält man einen reellen Ersatzkegelschnitt k_e mit der Gleichung

$$k_e \ldots -a_{00}\cdot x_0^2 + a_{11}\cdot x_1^2 + a_{22}\cdot x_2^2 = 0,\ a_{kk} > 0 \text{ für } k = 0, 1, 2.$$

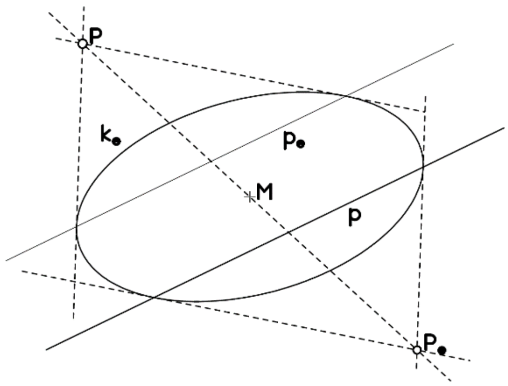
Die Polare von P(**p**) hat nun, bezüglich k_e, die Gleichung …

$$-a_{00}\cdot p_0\cdot x_0 + a_{11}\cdot p_1\cdot x_1 + a_{22}\cdot p_2\cdot x_2 = 0$$

Bemerkenswert ist nun, dass beim nullteiligen Kegelschnitt die Polare für einen reellen Pol auch reell ist.
Diese beiden Polaren – die des nullteiligen und die des Ersatzkegelschnitts − sind wechselseitig die Spiegelbilder bezüglich M(1 : 0 : 0).

Konstruktion der Polare bzw. des Pols.

1. Die Polare p von P ist die Polare bezüglich ke des an M gespiegelten Punktes P_e.
   <u>oder</u> … ist das an M gespiegelte Bild der Polare p_e. von P.
2. Der Pol P von p ist der Pol bezüglich k_e der an M gespiegelten Gerade p_e.
   <u>oder</u> … ist das Spiegelbild des Poles P_e von p.

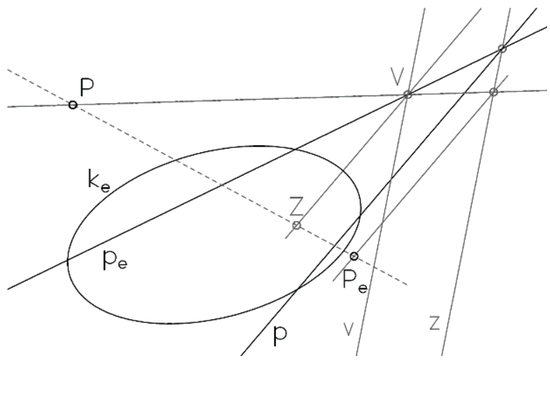


Damit ist eine Korrelation beschrieben. Sie ist offensichtlich involutorisch:
Sei der Pol A gegeben und a die gemäß 1. konstruierte Gerade, also das Spiegelbild der Ersatzpolare a_e. Der Pol von a, konstruiert gemäß 2., ist A_e, also der Pol von a bezüglich k_e,

Die Polare von M ist die Ferngerade. Die Polare eines Fernpunkts ist die zu seiner Richtung konjugierte Durchmessergerade.

Pol und Polare inzidieren nie – k hätte sonst ein reelles Element. Die Polarität hat also keine Fixelemente, ist mithin elliptisch.

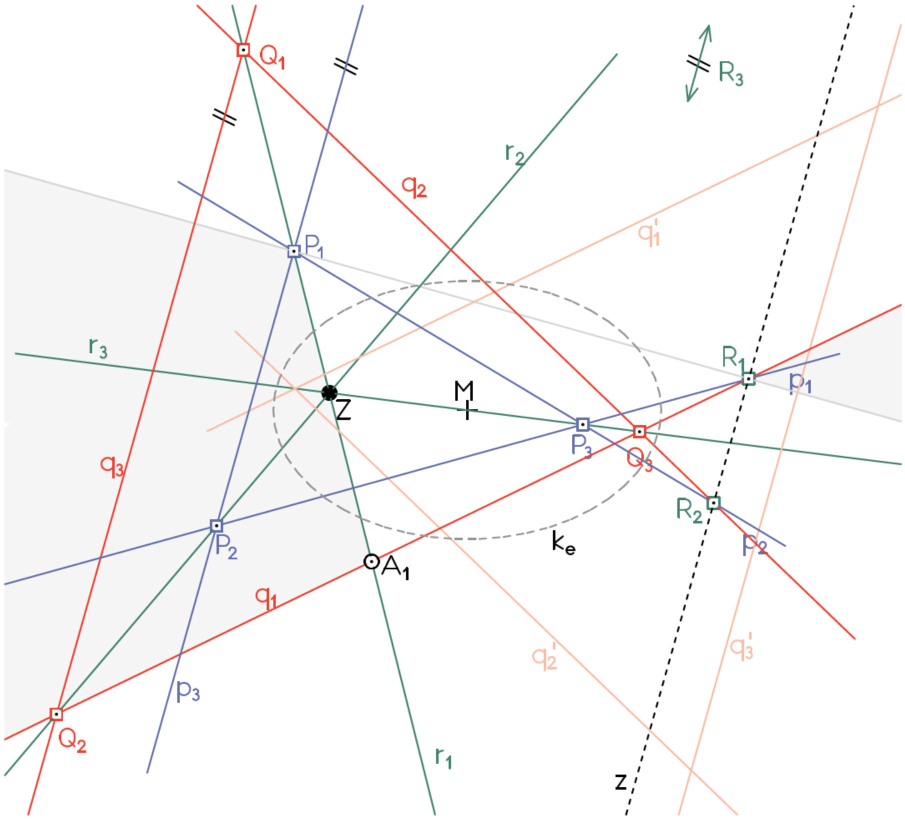
Diese Konstruktion lässt sich noch verallgemeinern, in dem man die Spiegelung am Mittelpunkt ersetzt durch eine involutorische Zentralkollineation, die den Ersatz- und damit auch den gegebenen Kegelschnitt auf sich abbildet; Zentrum Z und Achse z sind dann Pol und Polare. Die Punkt-Spiegelung ist ja auch eine solche mit der Ferngerade als Achse.



P_e und P sind einander zugeordnete Elemente unter dieser Zentralkollineation ebenso wie p_e und p. (P, p) stehen in der Pol-Polare-Relation genauso wie (P_e, p_e).

Damit lassen sich alle elliptischen Korrelationen erfassen, auch wenn der Ersatzkegelschnitt nicht O(1:0:0) zum Mittelpunkt (= Pol der Ferngerade) hat.

Oben wurde gezeigt, wie ein Dreieck und das bezüglich eines Kegelschnitts polare Dreieck durch eine DESARGUES'sche Konfiguration verbunden sind. Das gilt analog für elliptische Polaritäten bezüglich eines nullteiligen Kegelschnitts:



Dass hier M in r_3 liegt, ist nur ein Zufall, folgend aus der Tatsache, dass R_3 als ein Fernpunkt gewählt wurde.

Die Polarität, etwa $(P_1R_1A_1)(P_2q_2)$ mit $A_1 = p_1 \cdot q_1$, ist elliptisch, weil P_1 in dem Gebiet liegt, das von q_1 gemieden wird.

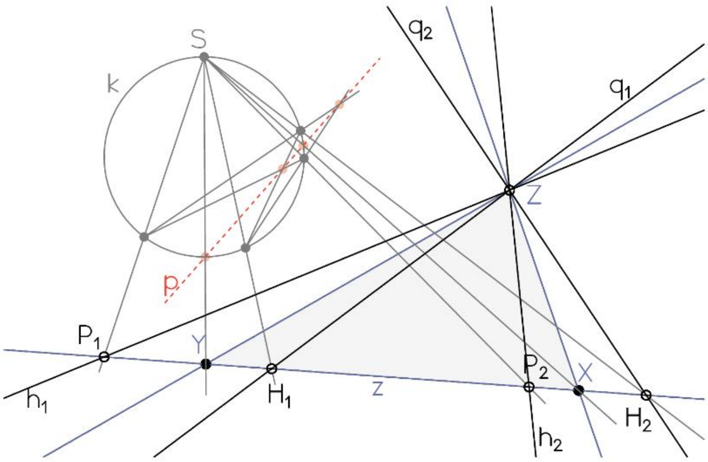
Die Konstruktion des Ersatzkegelschnitts ist nicht vollständig wiedergegeben. Sie beruht auf dem Dreieck $P_1P_2P_3$ und dem Dreiseit $q_1'q_2'q_3'$, welches aus einer Punktspiegelung aus $q_1q_2q_3$ hervorgeht. Die vom Ersatzkegelschnitt erzeugten Polaren der P_i (in der Zeichnung blass angedeutet) werden dann am Mittelpunkt M gespiegelt zu den eigentlichen Polaren der elliptischen Polarität.

Auch hier umfasst die Polarität alles: (P_i,q_i), (Q_i, p_i), (R_i, r_i) und (Z, z).

Anhang: Aufgabe 2 Grades

Der Vollständigkeit halber Hinweise zur Lösung der hier verwendeten Aufgaben 2. Grades: Von einer Polarität seien zwei Paare (P_1, q_1), (P_2, q_2) in allgemeiner Lage gegeben. Dann lässt sich leicht ein selbstpolares Dreieck ermitteln. Sei $Z = q_1 \cdot q_2$ und $z = \overline{P_1P_2}$, ferner $H_i = z \cdot q_i$ und $h_i = \overline{ZP_i}$. Dann sind polar zueinander $Z = q_1 \cdot q_2$ und $\overline{P_1P_2} = z$, ebenso $H_i = z \cdot q_i$ und $\overline{ZP_i} = h_i$.

Durch die Polarität wird in z eine Punkte-Involution induziert (durch die Punkte in z und die Schnittpunkte der zugeordneten Geraden durch Z. [Genauso natürlich eine Geraden-Involution in Z]. Es entsprechen einander (P_i, H_i), i = 1, 2. Falls diese Involution $P_1H_1 \bullet P_2H_2$ hyperbolisch ist, gibt es zwei reelle Fixpunkte, die zugleich zu beiden Paaren (P_i, H_i) harmonisch liegen.



Man projiziere diese vier Punkte auf einen beliebigen Kreis k und zwar aus einem seiner Punkte S und erhält P_i', H_i' als Punkte der entsprechenden Involution $P_1'H_1' \bullet P_2'H_2'$ in k.
Die Schnittpunkte $\overline{P_1'H_2'} \cdot \overline{P_2'H_1'}$ und $\overline{P_1'P_2'} \cdot \overline{H_1'H_2'}$ bestimmen die Achse p der Involution, die den Kreis in den Fixpunkten schneidet (oder auch nicht, wenn nämlich die Punkt-Involution und damit die gegebene Polarität elliptisch sind).
Die Projektion dieser Punkte aus S auf z liefert die Fixpunkte X, Y – falls diese denn existieren.

Die rechnerische Lösung geht aus von der Gleichheit der Doppelverhältnisse $DV(P_1,H_1, X,Y)$ und $DV(P_2,H_2, X,Y)$ und der daraus folgenden quadratischen Gleichung.

Hier für $DV(A_1,B_1, X,Y) = DV(A_2,B_2, X,Y)$ mit irgendwelchen notwendig verschiedenen Koordinaten a_i, b_i, x,y für A_i, B_i, X,Y für i = 1, 2.
(Das können x- oder y-Koordinaten oder sonst welche äquidistanten sein).

Das bedeutet $\frac{a_i - x}{b_i - x} : \frac{a_i - y}{b_i - y} = -1$

Nach einfachen Umformungen erhält man:

$2a_ib_i + 2xy - (a_i + b_i)x - (a_i + b_i)y = 0$ und

$2a_ib_i - s_i \cdot x - (s_i - 2x) \cdot y = 0$ mit $s_i = a_i + b_i$ (*)

Mit y aus (*) für i = 1: $y = (2a_1b_1 - s_1 \cdot x) : (s_1 - 2x)$ | in (*) für i = 2 folgt schließlich:

$(s_2 - s_1) \cdot x^2 + 2(a_1b_1 - a_2b_2) \cdot x + a_2b_2s_1 - a_1b_1s_2 = 0$

und mit $k = s_1 - s_2$ und $D = (a_1b_1 - a_2b_2) / k$ und $E = (a_1b_1s_2 - a_2b_2s_1) / k$ für $k \neq 0$. Daraus:

$x^2 - 2D \cdot x + E = 0$

$x_{1,2} = D \pm \sqrt{D^2 + E}$ (für $D^2 - E > 0$)

Für k = 0 ist ein Punkt der Fernpunkt und der andere der Mittelpunkt von z.B. A_1 und A_2. Wenn die Diskriminante $D^2 - E < 0$ ist, existiert keine Lösung (die Paare trennen sich).

Literatur [Cox] Coxeter, Reelle Projektive Geometrie der Ebene, München 1955
[Sto] Stolzenburg, Projektive Geometrie, Stuttgart 2009