Lösungen der Aufgaben in A. Stolzenburg, Projektive Geometrie, Seite 268

(Beispiel 6): Eine räumliche projektive Abbildung **x'** = **A·x** sei gegeben durch die Matrix **A** =
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Gesucht sind die Fixelemente.

Das charakteristische Polynom ist

$\rho(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\cdot\mathbf{E}) = (1 - \lambda)^2(-1 - \lambda)^2 = 0$ (durch Entwickeln nach der 1. Zeile)

Eigenwerte: 1, 1, –1, –1.

zu $\lambda = 1$: $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{o}$ liefert $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{o}$

Der Rang der Matrix ist 3; es gibt 1 lu Lösung $(0\ 0\ 0\ 1)^T$.

Der Fernpunkt der z-Achse ist Fixpunkt.

zu $\lambda = -1$: $(\mathbf{A} + \mathbf{E})\cdot\mathbf{x} = \mathbf{o}$ liefert $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{o}$ (der Rang ist 2)

mit lu Lösungen: $(0\ 1\ 0\ 0)^T$, $(0\ 0\ 1\ 0)^T$.

Die Fernpunkte der x- und der y-Achse und damit alle Fernpunkte des xy-Ebene sind Fixpunkte.

$\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Eigenwerte sind die gleichen.

$(\mathbf{A^T} - \mathbf{E})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{o}$ liefert $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{o}$ und die Lösung $(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$ (der Rang ist 3);

d.h. die Ebene $x_0 = 0$, also die Fernebene, ist Fixebene, sogar Fixpunktebene (s.o.).

$(\mathbf{A^T} + \mathbf{E})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{o}$ liefert $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{o}$ mit den Lösungen $(0\ 1\ 0\ 0)^T$, $(0\ 0\ 1\ 0)^T$,

also sind die Ebenen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, also alle Ebenen der x_3-Achse, Fixebenen, die x_3-Achse selber eine Fixgerade als Träger eines Büschels von Fixebenen.

Zusammengefasst: Die Fernebene ist Fixpunktebene, die x_3-Achse Fixgerade.

Die inhomogenen Abbildungsgleichungen sind: x' = –x; y' = –y; z' = z + 1;
Man kann die Abbildung als räumliche Gleitachsenspiegelung bezeichnen.

Sto / 12.06.2022
a@stolzenburg-essen.de