Lösungen der Aufgaben in A. Stolzenburg, Projektive Geometrie, Seite 70

Wie viele PAPPOS'sche Geraden gibt es?

Was für Beziehungen bestehen zwischen diesen?

Man macht sich leicht klar, dass es unter den Bedingungen das Satzes von PAPPOS sechs verschiedene Sechsecke gibt. Liegen nämlich die Punkte mit ungerader Nummer in der Gerade u, diejenigen mit gerader in g, hat man, in einem Punkt (z.B. 1 in u) beginnend, für den zweiten Punkt 3 Möglichkeiten zur Auswahl, für den dritten, in u, nur noch 2, dann 2 für den nächsten in g; dann ist alles festgeschrieben. Das ergibt insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten. Da die Sechsecke zyklisch sind, spielt es keine Rolle, mit welchem Punkt von g man begonnen hat. Da bei dieser Zählweise die Sechsecke einmal vorwärts und einmal rückwärts durchlaufen werden. gibt es 6 verschiedene PAPPOS-Geraden.

Alle $3 \cdot 3 = 9$ möglichen Sechseckseiten (Verbindungen von Punkte in u mit solchen in g) haben 18 Schnittpunkte untereinander, nämlich, $\binom{9}{2} = 36$ Kombinationen minus 18 Schnittpunkte in u und g. Jede dieser Geraden verbindet einen "geraden Punkt" mit einem "ungeraden" und wird dann noch von den Geraden geschnitten, die die übrigen 2 geraden und 2 ungeraden Punkte verbinden. Es liegen also in jeder Sechseckseite 4 von diesen Schnittpunkten. außerdem noch je ein Punkt von u und von g.

Durch fast alle diese Punkte gehen (bei allgemeiner Lage) nur 2 Geraden, nur durch die nummerierten Punkte von u und g gehen je 3 Sechsseiten, also insgesamt 4 Geraden.

Insgesamt hat man $2 + 9 + 6 = 17$ Geraden und $6 + 18 + 2 = 26$ Punkte, wobei die letzten beiden neue Punkte (G und U) sind, in denen sich je drei der 6 PAPPOS-Geraden treffen (o. Beweis). Den Beweis und vieles weitere Interessante findet man in „Über den Satz von PAPPOS“ von P. Baum unter http://Paefo.de/PG.

Sto / 12.06.2022
a@stolzenburg-essen.de