Lösungen der Aufgaben in A. Stolzenburg, Projektive Geometrie, Seite 57

Man dualisiere die räumliche DESARGUES'sche Konfiguration

Die DESARGUES'sche Figur im Raum besteht aus 10 Punkten, 10 Geraden und 5 Ebenen.

Durch jeden Punkt gehen 3 Geraden und 3 Ebenen.

Jede Gerade trägt 3 Punkte und 2 Ebenen.

Jede Ebene enthält 6 Punkte und 4 Geraden.

Die dazu duale Figur besteht aus 10 Ebenen, 10 Geraden und 5 Punkten.

In jeder Ebene liegen 3 Geraden und 3 Punkte.

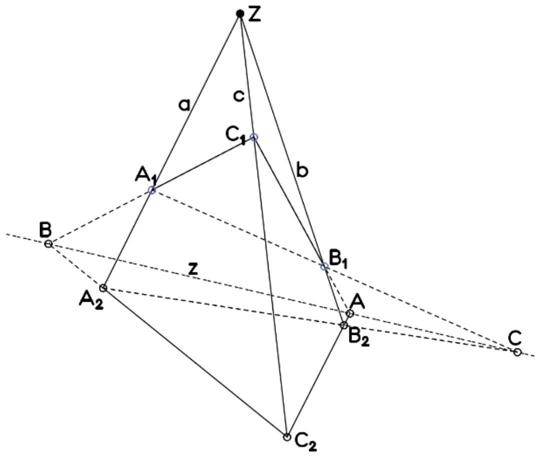
Jede Gerade trägt 3 Ebenen und 2 Punkte.

Jeder Punkt enthält 6 Ebenen und 4 Geraden.

Daraus wird schon ersichtlich, dass der räumliche DESARGUES, anders als der ebene, nicht zu sich selbst dual ist.

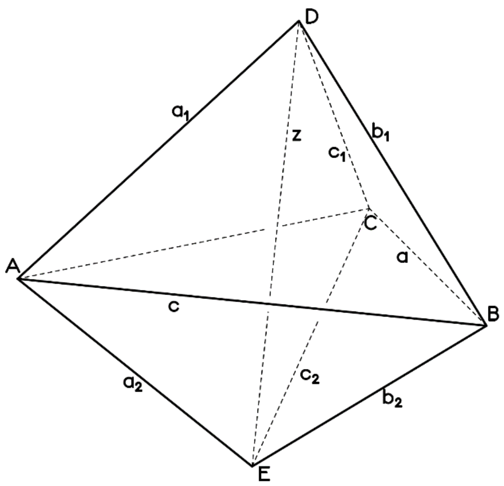
5 Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ in allgemeiner Lage seien gegeben.
3 davon haben den Schnittpunkt $Z = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ und untereinander die Schnittgeraden $a = \overline{\beta\gamma}$, $b = \overline{\alpha\gamma}$, $c = \overline{\alpha\beta}$.

Die Ebenen δ, ε schneiden a, b, c in den Dreiecken $A_1B_1C_1$ bzw. $A_2B_2C_2$ mit den Dreiseiten $a_1b_1c_1$ bzw. $a_2b_2c_2$ (in der üblichen Art bezeichnet).
a_1 und a_2 liegen dann in der Ebene α und treffen sich in einem Punkt A, der auch in den Ebenen δ, ε liegt, also auch im Schnitt $z = \overline{\delta\varepsilon}$. Entsprechendes gilt für $B = b_1 \cdot b_2$ und $C = c_1 \cdot c_2$. A, B, C liegen alle in z.



Ausgangspunkt war hier das Dreikant abc in Punkt Z.
Schneidet man den Schein der ganzen räumlichen Figur aus einem beliebigen Punkt mit einer beliebigen Ebene, erhält man die bekannte ebene DESARGUES'sche Konfiguration.

5 Punkte A, B, C, D, E in allgemeiner Lage seien gegeben.
3 davon bestimmen die Ebene $z = \overline{\overline{ABC}}$ und untereinander die Verbindungsgeraden $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.
Die Punkte D, E werden mit a, b, c verbunden zu Dreiflachen $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ bzw. $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ mit den Dreikants $a_1b_1c_1$ bzw. $a_2b_2c_2$ (a_1 liegt gegenüber den Ebenen β_1, γ_1 in Z u.s.w.).
a_1 und a_2 gehen dann durch den Punkt A und liegen in einer Ebene α, die auch durch die Punkte D, E geht, also auch durch die Verbindungsgerade $z = \overline{DE}$. Entsprechendes gilt für $\beta = \overline{B_1B_2}$ und $\gamma = \overline{C_1C_2}$. α, β, γ gehen durch z.



Ausgangspunkt war hier das Dreiseit abc in der Ebene ζ (= ABC).
Verbindet man einen ebenen Schnitt der ganzen räumlichen Figur mit einem beliebigen Punkt, erhält man die weniger bekannte duale DESARGUES'sche Konfiguration im Bündel.

Sto / 12.06.2022
a@stolzenburg-essen.de