DESARGUES'sche Figuren innerhalb einer harmonischer 13er-Figur

Alexander Stolzenburg

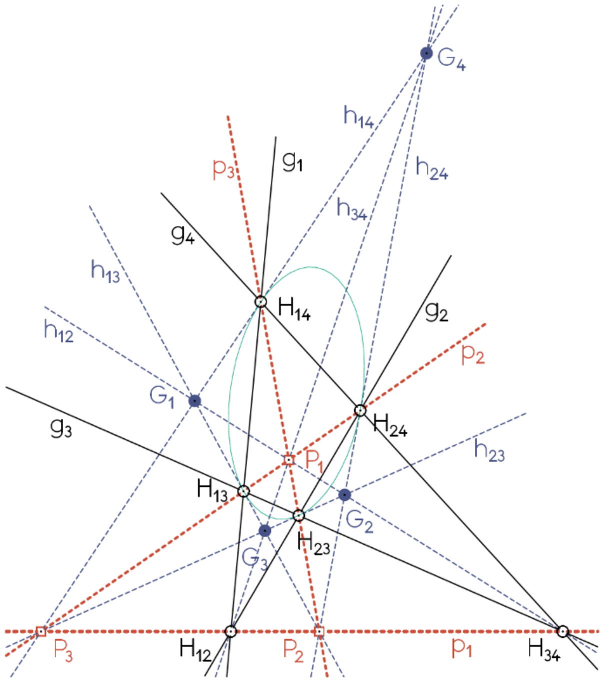
06.11.2022

Zusammenfassung: In jeder harmonischen 13er-Konfigutation sind DESARGUES'sche Figuren enthalten, man muss je drei geeignete Punkte und Geraden herausnehmen.

Wir gehen aus von einer harmonischen 13er-Figur in der 0-ten Lesart mit den Ecken G_i und den Seiten g_i, also ohne Inzidenz von ersten Seiten und letzten Ecken. Die G_i tragen je drei Geraden und die g_i je drei Punkte. Die weiteren neun Punkte H_{ik} und P_i tragen je vier Geraden und die Geraden h_{ik} und p_i je vier Punkte. Das Nebendreiseit hat die Seiten $p_1p_2p_3$ und Ecken $P_1P_2P_3$.

Die g_i bilden dabei ein vollständiges Vierseit, die G_i ein vollständiges Viereck. $P_1P_2P_3$ / $p_1p_2p_3$ sind das Nebendreiseit / dreieck, das beiden gemeinsam ist.

Für $k \neq i, i, k = 1 \ldots 4$ gilt $H_{ik} = g_i \cdot g_k$, $h_{ik} = \overline{G_i \cdot G_k}$.
In g_i liegen die Punkte H_{ik} für $k \neq i$, $i = 1 \ldots 4$,
in G_i liegen die Geraden h_{ik} für $k \neq i$, $i = 1 \ldots 4$.



Für alles weitere, auch den Aufbau dieser Figur aus 13 Punkten und 13 Geraden, den Zusammenhang mit harmonischer Lage und mit Polaritäten siehe [Sto1], [Sto2], [Baum].

Vorbereitung

Ein Punkt, durch den 3 bzw. 4 Geraden der Figur gehen. möge ein 3g-Punkt bzw. 4g-Punkt heißen, analog eine Gerade, die 3 oder 4 Punkte trägt 3P- bzw. 4P-Gerade.

Eine DESARGUES'SCHE Konfiguration besteht aus 10 Geraden und 10 Punkten, und zwar aus

10 3P-Geraden, deren Punkte 3g-Punkte sind. | 10 3g-Punkten, deren Geraden 3P-Geraden sind.

Die 13 Geraden und 13 Punkte einer harmonischer 13er-Figur bestehen aus

1. vier 3P-Geraden (im Beispiel den g_i), deren Punkte ihrerseits 4g-Punkte sind;
2. drei 4P-Geraden (den p_i), deren Punkte alles 4g-Punkte sind;

   Sie bilden ein Dreiseit aus den 4P-Geraden.
3. sechs 4P-Geraden (den h_{ik}), deren Punkte zwei 3g-Punkte und zwei 4g-Punkte sind.

   Die Geraden in den 3g-Punkten sind vom gleichen Typ 3, die in den 4g-Punkten sind vom Typ 2.

Insgesamt: 4 3P-Geraden und 9 4P-Geraden.

1. vier 3g-Punkten (im Beispiel den G_i), deren Geraden ihrerseits 4P-Geraden sind;
2. drei 4g-Punkten (den P_i), deren Geraden alles 4g-Punkte sind;

   Sie bilden ein Dreieck aus den 4g-Punkten.
3. sechs 4g-Punkten (den H_k), deren Geraden zwei 3P-Geraden und zwei 4P-Geraden sind.

   Die Punkte in den 3P-Geraden sind vom gleichen Typ 3, die in den 4P-Geraden sind vom Typ 2.

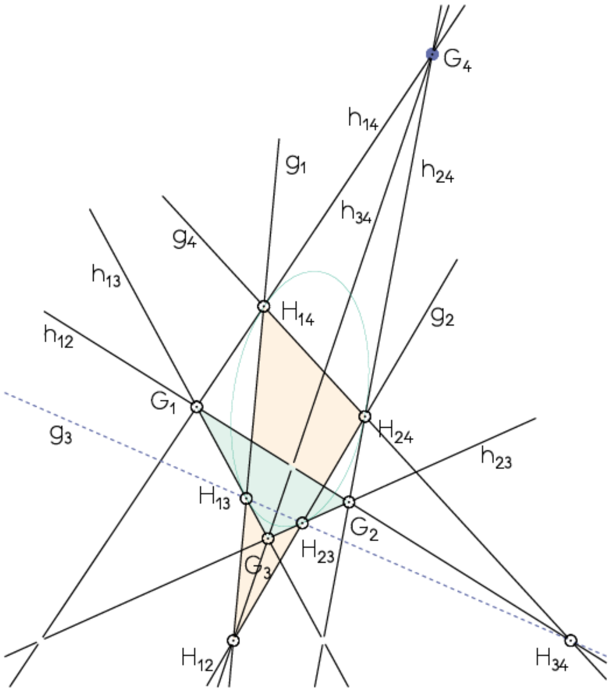
Insgesamt: 4 3g-Punkte und 9 4g-Punkte.

Die Frage liegt nahe, ob eine DESARGUES'sche Konfiguration mit 10 Punkten und 10 Geraden in einer harmonischen 13er-Figur enthalten ist.

Werden die Nebenseiten $p_1p_2p_3$ herausgenommen, so verbleiben 10 Geraden und auch 10 Punkte, da sich in den P_i jetzt nur noch zwei Geraden treffen.

Damit liegt eine DESARGUES'sche Konfiguration vor mit den vermöge G_4 zentralperspektiven Dreiecken $P_1P_2P_3$ und $Q_1Q_2Q_3$, axial-perspektiv durch g_3.

Interessant ist dabei, dass dieselbe Polarität zwischen gleich benannten Elementen in den Figuren in gleicher Weise besteht. Hier ist sie hyperbolisch, sichtbar gemacht durch den Kegelschnitt.



Satz: Innerhalb einer harmonischen 13er-Figur gibt es eine einzige (echte) DESARGUES'sche Konfiguration.

Bew.: Zu zeigen ist nur noch, dass es außer der oben angegebenen keine weitere möglich ist.

1. Man kann keine der Geraden h_{ik} herausnehmen.
   Nimmt man etwa h_{13}, dann auch G_1, G_3;
   a. noch ein h_{ik} mit komplementären Indizes, also zu h_{13} noch h_{24}, folgt daraus, dass auch G_2 und G_4, also vier Punkte fehlen.
   b. noch ein h_{ik} mit einem wiederholten Index, etwas h_{23}, dann sind G_1, G_2, G_3 weg; als weitere Geraden fallen aus: h_{i4} (G_4 fiele weg), g_i (wegen H_{i3}, H_{i2}, H_{i1}), p_1 (P_2, P_3), p_2 (P_3, H_{13}), p_3 (P_3, H_{23}).
2. Auch kein g_i: Wenn man ein g_i. etwa g_1, weglässt, werden nur die 3 H-Punkte in ihr (H_{12}, H_{13}, H_{14}) zu 3-Punkten herabgestuft, es müssen dann noch 2 Geraden weg (wegen 1. keine h-Gerade) mit zugleich 3 Punkten.
   a. zunächst eine weitere g-Gerade, etwa g_2; dann fällt nur H_{12} weg und es werden H_{23}, H_{24} zu 3g-Punkten. Eine 3. Gerade müsste 2 Punkte entfernen und 2 herabstufen, denn H_{13}, H_{14} und H_{23}, H_{24} sind schon 3-g; kein h_{ik} wegen 1. und p_1 würde keinen Punkt entfernen, p_2, p_3 würden H_{34} als 4g-Punkt bestehen lassen.
   b. zunächst eine p-Gerade, etwa p_1; dann fällt H_{12} weg und es werden P_1, P_2, H_{34} zu 3g-Punkten. Es gibt dann keine mögliche 3. Gerade, die 2 Punkte wegnimmt und nicht durch die neuen 3g-Punkte ($H_{12}H_{13}H_{14}$ $P_1P_2H_{34}$) geht, auch nicht durch die 3g-Punkte $G_1G_2G_3G_4$. Es bleiben $H_{23}H_{24}P_3$ – und die liegen nicht in einer Gerade.
3. Es bleibt die Wahl von $p_1p_2p_3$ und damit auch $P_1P_2P_3$. **qeδ**

Die übrigen sechs Punkte in den p_i (H_1H_{34} $H_{13}H_{24}$, $H_{14}H_{23}$) werden von 4g- zu 3g-Punkten.

Kurz: Drei Punkte und Geraden muss man herausnehmen. Das können der Anzahl wegen nur die vom Typ 2 sein, denn in jeder Gerade des Dreiseits fallen dadurch 2 4g-Punkte weg, die beiden anderen werden zu 3g-Punkten, ebenso die sechs sonst noch von den p_i getroffenen Punkte H_{ik}. **qeδ**

Es folgt ein zweiter Beweis, der von der Erhaltung der Dualität ausgeht. Selbst die Polarität bleibt erhalten.

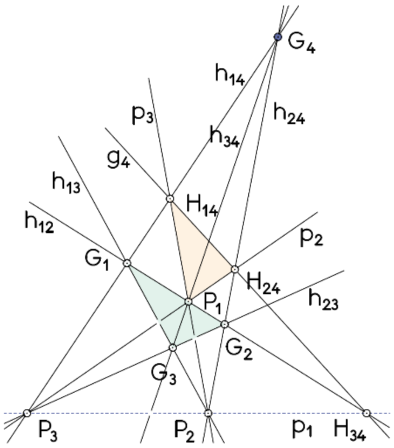
Bew. 2: Beide Konfigurationen sind in sich völlig dual, auch in den Bezeichnungen. Um also von der einen auf die andere zu kommen, kann man nur im Einklang mit der Dualität herausnehmen; für 3 Punkte und 3 Geraden ist $P_1P_2P_3$ / $p_1p_2p_3$ die einzige Möglichkeit. Dass diese Wahl das Gewünschte leistet, wurde oben aufgezeigt. **qeδ**

Das Umgekehrte gilt nicht: Eine beliebige DESARGUES'sche Konfiguration lässt sich in der Regel nicht zu einer harmonischen 13er-Konfiguration erweitern.

In [Baum] wurde gezeigt, dass es über die eben angesprochene DESARGUES'sche Konfiguration hinaus weitere Figuren gibt, die dem DESARGUES'schen Satz genügen (Wenn zwei Dreiecke zentral-perspektiv sind, dann sind sie auch axial-perspektiv – und umgekehrt: wenn axial-perspektiv, dann auch zentral-perspektiv), bei denen aber eine oder zwei oder drei Ecken des einen Dreiecks mit einer Seite des anderen inzidieren und somit auch Punkte mit 4 Geraden und Geraden mit 4 Punkten vorkommen dürfen. Das sind im strengen Sinn keine Konfigurationen mehr: man kann sie DESARGUES-Figuren nennen.

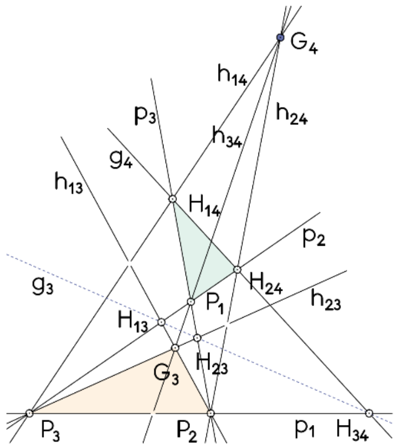
Es folgen dafür Beispiele, fußend auf den Ergebnissen aus [Baum]:

Entfernt: $g_1g_3h_{12}$ / $H_{12}H_{13}H_{23}$
[Baum] $p_3p_4g_{23}$ / $G_{23}G_{34}G_{24}$ Nr.3



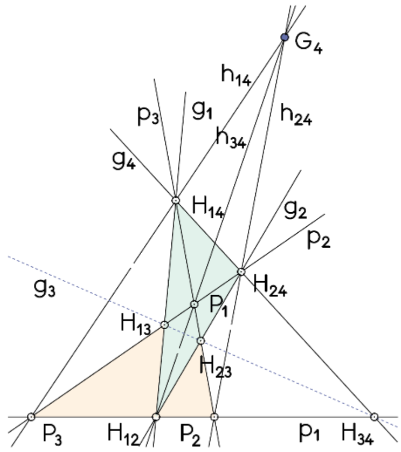
Inzidenzen: P_1 und h_{12}

Entfernt: $g_1g_2h_{12}$ / $G_2G_1H_{12}$
[Baum] $p_3p_2g_{23}$ / $P_2P_3G_{23}$ Nr.7



P_1 und p_2, P_2 und p_3

Entfernt: $h_{13}h_{23}h_{22}$ / $G_1G_2G_3$
[Baum] $g_{12}g_{13}g_{23}$ / $P_3P_2P_3$ Nr.6



H_{12} u. p_1, H_{24} u. p_2, H_{14} u. p_3

Anhang Synopse der verschiedenen Bezeichnungen bei Baum und hier.
(Die innere Logik ist bei beiden gleich, aber Symbole und Nummerierung sind verschieden):

Baum	Sto	Baum	Sto	Baum	Sto	Baum	Sto	Baum	Sto	Baum	Sto
P_1	G_3	p_1	g_4	G_{12}	H_{24}	g_{12}	h_{13}	Q_1	P_1	q_1	p_1
P_2	G_2	p_2	g_2	G_{34}	H_13	g_{34}	h_{24}	Q_2	P_3	q_2	p_3
P_3	G_1	p_3	g_1	G_{13}	H_{14}	g_{13}	h_{23}	Q_3	P_2	q_3	p_2
P_4	G_4	p_4	g_3	G_{23}	H_{23}	g_{23}	h_{14}				
				G_{14}	H_34	g_{14}	h_{34}				
				G_{23}	H_{12}	g_{23}	h_{12}				
Viereck-Ecken		Vierseit-Seiten		Vierseit-Ecken		Viereck-Seiten		Nebendreieck		Nebendreiseit	

Literatur: [Baum] P. Baum, Struktur der ebenen harmon 13er-Figur in http://PaeFo.de/PG
[Sto1] A. Stolzenburg, Projektive Geometrie, Stuttgart 2009
[Sto2] A. Stolzenburg, Die harmonische 13er-Figur in http://PaeFo.de/PG