Ähnliche Vierecke

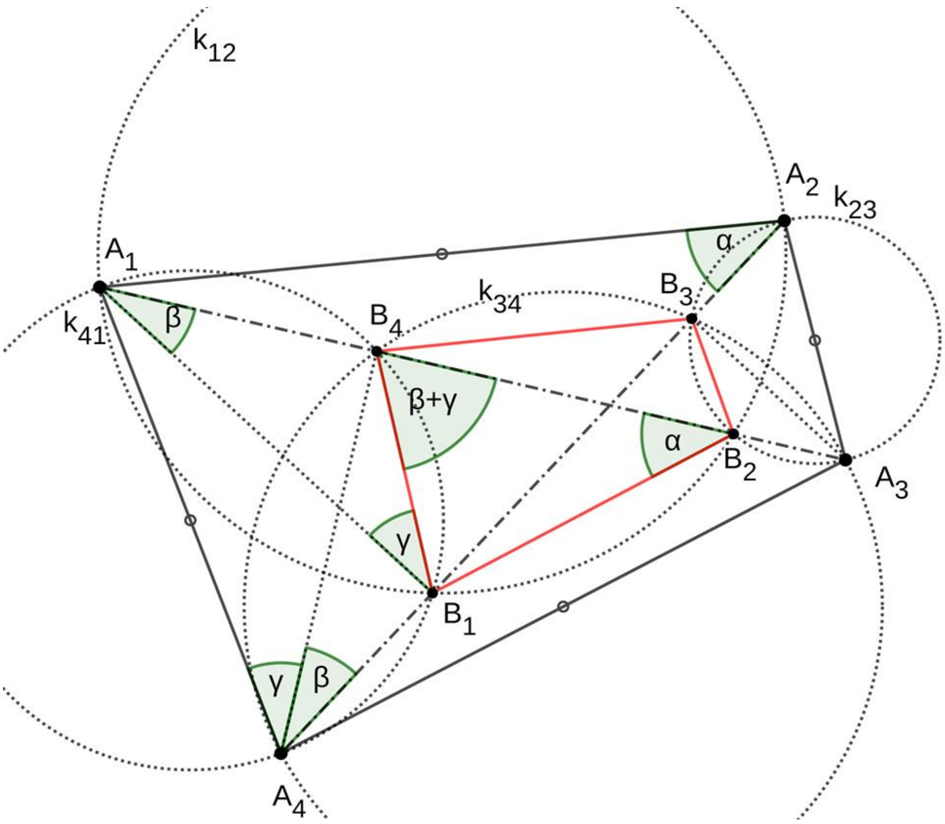
Alexander Stolzenburg und Peter Baum
20.10.2022

Zusammenfassung: Ein Satz über ähnliche Vierecke wird elementargeometrisch bewiesen und dann mit den Werkzeugen der Projektiven Geometrie. Es folgt die Untersuchung der wiederholten Anwendung und die analytische Behandlung eines Beispiels.

Sei $A_1A_2A_3A_4$ ein nicht-entartetes Viereck. Die Kreise mit den Seiten $\overline{A_4A_1}$ und $\overline{A_1A_2}$ als Durchmesser schneiden sich außer in A_1 in einem weiteren Punkt B_1. Entsprechend ergeben sich die Punkte B_i, i = 2, 3, 4 aus den Kreisen über $\overline{A_iA_{i+1}}$ (mit $A_5 = A_1$).

Behauptung: Viereck $B_1B_2B_3B_4$ ist ähnlich dem Viereck $A_1A_2A_3A_4$.

Bew.: Wir zeigen an Hand der Abbildung, dass die Dreiecke $A_1A_2A_4$ und $B_1B_2B_4$ in zwei Winkeln übereinstimmen. Dann stimmen sie wegen der gleichen Winkelsumme auch im dritten Winkel überein, sind also ähnlich. Dasselbe lässt sich dann durch analoge Überlegungen auch für die Dreiecke $A_2A_3A_4$ und $B_2B_3B_4$ zeigen, und daraus folgt dann die Ähnlichkeit der beiden Vierecke.



Nach dem Satz des Peripheriewinkels sind im Kreis k_{12} die beiden Peripheriewinkel α mit den Scheitelpunkten A_2 und B_2 und im Kreis k_{41} die beiden Peripheriewinkel β und γ jeweils gleich groß. Und nach dem Satz vom Außenwinkel ist im Dreieck $A_1B_1B_4$ der Winkel im Dreieck $B_1B_2B_4$ mit dem Scheitelpunkt B_4 gleich der Summe β+γ, also gleich dem Winkel im Dreieck $A_1A_2A_4$ mit dem Scheitelpunkt A_4. Somit stimmen die Dreiecke $A_1A_2A_4$ und $B_1B_2B_4$ in zwei Winkeln überein. **qeδ**

a@stolzenburg-essen.de / p.baum@posteo.de

Für den projektiven Beweis werden drei einfache Aussagen vorangestellt:

(1) Wenn eine Kollineation einer Punktreihe auf sich zwei Punkte miteinander vertauscht, dann gilt das für alle Punkte dieser Reihe.

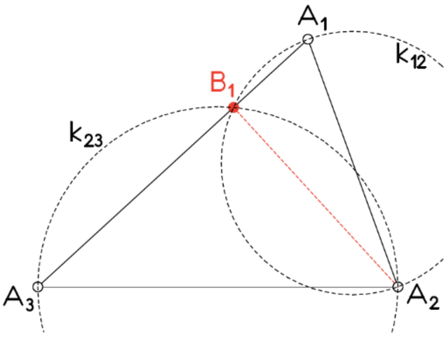
(1') Wenn eine Kollineation eines Geradenbüschels auf sich zwei Geraden miteinander vertauscht, dann gilt das für alle Geraden dieses Büschels.

Bew.: (links): Seien V und W die vertauschten Punkte, A ein weiterer Punkt und A' sein Bildpunkt. Dann gilt DV(V,W, A,A') = DV(W,V, A',A") = DV(V,W, A",A') wegen der Doppelverhältnistreue und dann der Vertauschungsregeln. Also ist A" = A. **qeδ**

(2) Die Rechtwinkligkeit lässt sich bekanntermaßen projektiv erfassen: die Geraden g und h schließen genau dann einen Rechten Winkel ein, wenn die Fernpunkte von g und h harmonisch bezüglich des absoluten Punktpaares liegen. Siehe etwa [Sto, S. 112].

(3) Die Kreise über zwei Seiten eines Dreiecks treffen sich im Höhenfußpunkt zur dritten Seite.

Bew.: THALES-Satz für zwei(!) Kreise! **qeδ**



Die Idee der projektiven Erzeugung von Kreisen durch zwei Geradenbüschel (wobei die Projektivität in der Orthogonalität besteht), zeigt, dass die Punkte B_i statt als Schnittpunkte von Kreisen auch als Höhenfußpunkte definiert werden können.

Damit lässt sich dieselbe Aufgabe auch so formulieren:

$A_1A_2A_3A_4$ sei ein beliebiges nicht-entartetes Viereck. Die Punkte B_i seien die Fußpunkte der Lote aus A_i auf diejenigen Diagonalen, die nicht durch A_i gehen.

Behauptung: Viereck $B_1B_2B_3B_4$ ist ähnlich dem Viereck $A_1A_2A_3A_4$.

Bew.: (Siehe die Zeichnung auf Seite 3). Die Diagonalen $d_1 = \overline{A_1A_3} = \overline{B_2B_4}$, $d_2 = \overline{A_2A_4} = \overline{B_1B_3}$ sind nach Konstruktion den beiden Vierecken gemeinsam.

Sei E_i der 4. harmonische Punkt zu D_i bezüglich des absoluten Punktepaares, dann stehen die Geraden durch E_i senkrecht auf d_i, i = 1, 2, und sie treffen d_1 als Lot durch A_2 in B_2 und als Lot durch A_4 in B_4. Entsprechend erhält man B_1 und B_3 über E_2.

Es wird nun eine Kollineation κ zugrunde mit dem Fixpunkt $F = d_1 \cdot d_2$, der Ferngerade als Fixgerade und mit den Zuordnungen $A_i \to B_i$ für i = 1 und 2.

Aus $A_1 \to B_1$ folgt $d_1 = \overline{A_1F} \to \overline{B_1F} = d_2$. Aus $A_2 \to B_2$ folgt $d_1 = \overline{A_2F} \to \overline{B_2F} = d_2$. d_1 und d_2 werden also durch κ vertauscht und damit auch deren Fernpunkte D_1, D_2.

Es ist nun zu zeigen, dass $A_i \to B_i$ also $K_i = \kappa(A_i)$ auch für i = 3 und i = 4 richtig ist.

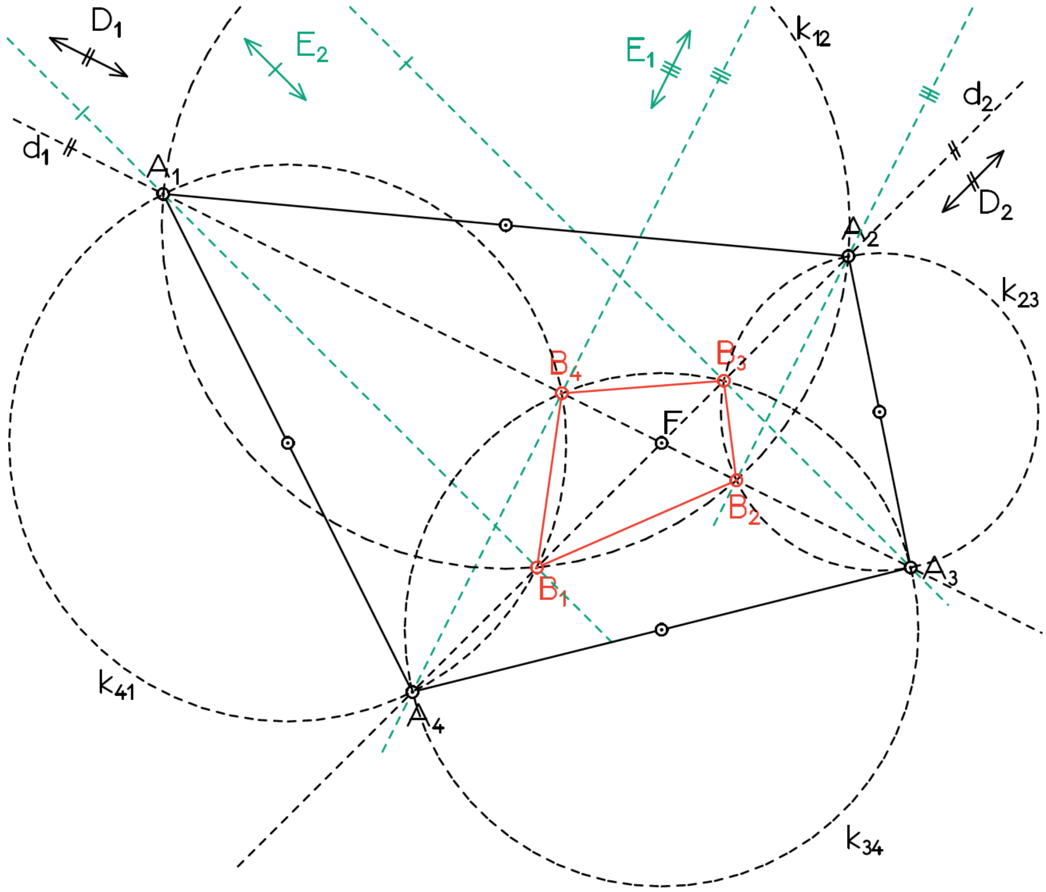
κ vertauscht nach (1) auch E_1 und E_2.

Es gilt $D_1A_1FA_3 \overline{\barwedge} D_2B_1FB_3$ (Projektion von d_1 aus E_2 auf d_2).

Dann sind die Doppelverhältnisse gleich: DV(D_1, A_1, F, A_3) = DV(D_2, B_1, F, B_3) und andererseits gilt nach Anwendung von κ: DV(D_1, A_1, F, A_3) = DV(D_2, B_1, F, K_3). Der Vergleich ergibt $B_3 = K_3$. Ebenso: $B_4 = K_4$. Damit hat man $A_i \to B_i$ für i = 1 … 4.

Damit gilt:

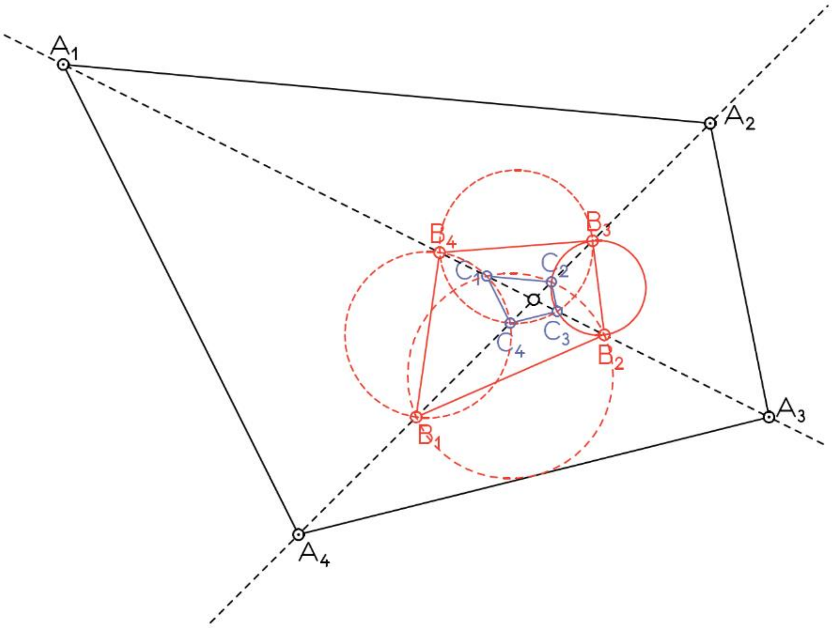
DV(A_1, A_3, F, D_1) = DV(B_1, B_3, F, D_2) und DV(A_2, A_4, F, D_2) = DV(B_2, B_4, F, D_1). Weil D_1, D_2 Fernpunkte sind, sind die Doppelverhältnisse auch Teilverhältnisse: TV(A_1, A_3, F) = TV(B_1, B_3, F) und ebenso TV(A_2, A_4, F) = TV(B_2, B_4, F). Damit sind die Vierecke $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ ähnlich zueinander. **qeδ**



Interessant ist nun auch das Ergebnis einer

Iteration

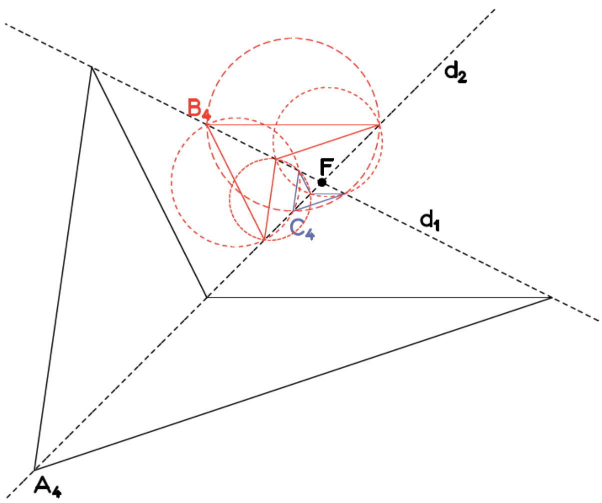
Wird die Konstruktion iteriert, indem man auf $B_1B_2B_3B_4$ die gleichen Operationen ausführt wie oben auf $A_1A_2A_3A_4$, erhält man natürlich wieder ein ähnliches Viereck $C_1C_2C_3C_4$, jetzt mit der Besonderheit, dass es zu $A_1A_2A_3A_4$ parallel ist, aus einer zentrischen Streckung aus F hervorgehend. Der Grund: Die C_i liegen in denselben Diagonalen wie die A_i. Entsprechende Doppelverhältnisse bleiben erhalten, die Teilverhältnisse auch, und aus deren Gleichheit folgt die Parallelität.

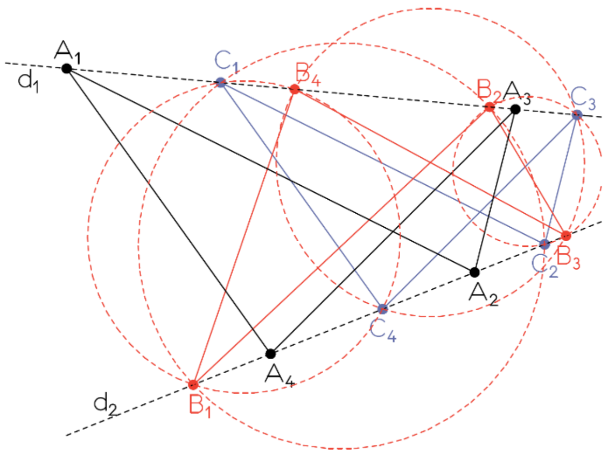


Die Gleichheit der Winkel von $A_1A_2A_3A_4$ und $C_1C_2C_3C_4$ folgt auch aus (1): Der Fernpunkt z.B. von $\overline{A_1A_2}$ wird durch κ abgebildet auf den von $\overline{B_1B_2}$ und dieser dann auf den von $\overline{C_1C_2}$, welcher mit dem von $\overline{A_1A_2}$ übereinstimmt.

Bemerkenswert ist noch, dass sich beim Übergang von einem Viereck zum nächsten der Umlaufsinn umkehrt – aber nur für unser euklidisches Bewusstsein; in der topologisch einseitigen projektiven Ebene bleibt dieser Umlaufsinn erhalten.

Dass die Aussage der Behauptung auch für nicht-konvexe Vierecke und für überschlagene Vierecke richtig ist, mögen die folgenden Zeichnungen bekräftigen.





Notizen zur analytischen Behandlung eines Beispiels

(Das Beispiel folgt der Zeichnung von Seite 3).
Der Fixpunkt sei der Bequemlichkeit halber $F(1 : 0 : 0)$.
$A_1(\mathbf{a_1})$ und $A_3(\mathbf{a_3})$ mögen in $d_1 \ldots x_1 + 2x_2 = 0$ liegen, $A_2(\mathbf{a_2})$ und $A_4(\mathbf{a_4})$ in $d_2 \ldots x_1 - x_2 = 0$.
etwa $A_1(1 : -8 : 4)$, $A_2(1 : 3 : 3)$, $A_3(1 : 4 : -2)$, $A_4(1 : -4 : -4)$.
Man berechnet dann leicht $B_1(1 : -2 : -2)$, $B_2(5 : 6 : -3)$, $B_3(1 : 1 : 1)$, $B_4(5 : -8 : 4)$.

Zum Beispiel: B_1 = Schnitt von $d_2 \ldots$ und Lot l_1 von A_1 auf d_2
Lote auf $d_2 \ldots \alpha\cdot x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Punktprobe für A_1: $\alpha\cdot 1 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow \alpha = -4$
damit $l_1 \ldots -4x_0 + x_1 + x_2 = 0$ (I)
$d_2 \ldots \qquad x_1 - x_2 = 0$ (II)
Aus (I) – (II) $\ldots -4x_0 + 2x_2 = 0$ und aus (I) + (II) $\ldots -4x_0 + 2x_1 = 0$
hat man zu $x_0 = 1$: $x_1 = -2$ und $x_2 = -2$ und somit
$B_1(1 : -2 : -2)$.

Gesucht ist nun die Matrix $\mathbf{A}$ der Abbildung mit $\mathbf{A}\cdot\mathbf{a_i} = \lambda\cdot\mathbf{b_i}$.

Ansatz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Wenn F Fixpunkt sein soll, muss gelten $\mathbf{A}\cdot\mathbf{f} = \lambda\cdot\mathbf{f}$. Daraus folgt sofort $a_{10} = a_{20} = 0$.

Wenn u … $x_0 = 0$ Fixgerade sein soll, muss in $\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}0\\v_1\\v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{01}v_2 + a_{02}v_2\\ ?\\ ?\end{pmatrix}$ der Term

$a_{01}\cdot v_1 + a_{02}\cdot v_2 = 0$ sein für alle v_1 und v_2. Das ist nur möglich für $a_{01} = a_{02} = 0$.

Damit reduziert sich der Ansatz zu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & a_{11} & a_{12}\\0 & a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ oder $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & a & b\\0 & c & d\end{pmatrix}$

$A_1(1{:}-8{:}4) \rightarrow B_1(1{:}-2{:}-2)$: $-8a + 4b = -2$
$-8c + 4d = -2$

$A_3(1{:}4{:}-2) \rightarrow B_3(1{:}1{:}1)$ liefert das Gleiche
$-4a + 2b = -1$ I
$-4c + 2d = -1$ II

$A_2(1{:}3{:}3) \rightarrow B_2(5{:}6{:}-3)$ $15a + 15b = 6$
$15c + 15d = -3$

$A_4(1{:}-4{:}-4) \rightarrow B_4(5{:}-8{:}4)$ $-20a - 20b = -8$
$-20c - 20d = 4$ (das Gleiche)
$5a + 5b = 2$ III
$5c + 5d = -1$ IV

I, III $\begin{cases}-4a + 2b = -1\\ 5a + 5b = 2\end{cases}$ hat die Lösung $a = \frac{3}{10}$, $b = \frac{1}{10}$

II, IV $\begin{cases}-4c + 2d = -1\\ 5c + 5b = -1\end{cases}$ hat die Lösung $c = \frac{1}{10}$, $d = -\frac{3}{10}$

Damit: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ (projektiv äquivalent; auf einen Faktor $\frac{1}{10}$ kommt es nicht an).

A_1: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-20\\-20\end{pmatrix} = 10\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = 10\cdot\mathbf{b_1}$

A_2: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{a_2} = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\12\\-6\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\-3\end{pmatrix} = 2\cdot\mathbf{b_2}$

A_3: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{a_3} = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} = 10\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 10\cdot\mathbf{b_3}$

A_4: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{a_4} = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-16\\8\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}5\\-8\\4\end{pmatrix} = 2\cdot\mathbf{b_4}$

Probe für F, D_1 und D_2:

F: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{f} = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{f}$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{d_1} = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-5\\-5\end{pmatrix} = -5\cdot\mathbf{d_2}$ D_2: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{d_2} = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix} = -2\cdot\mathbf{d_1}$

Die 2. Runde:

B_1: $\mathbf{c_1} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

B_2: $\mathbf{c_2} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

B_3: $\mathbf{c_3} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

B_4: $\mathbf{c_4} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b_4} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Man sieht: Die C_i gehen durch eine zentrische Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{10}$ mit dem Zentrum F aus den A_i hervor: $\mathbf{c_i} = \frac{1}{10}\cdot\mathbf{a_i}$ für i = 1 … 4.

Die Abbildungsmatrix ist $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Da die Zuordnung $A_i \to C_i$ die zweifache Anwendung der durch die Matrix **A** vermittelten Abbildung ist, kann man die Matrix dieser Abbildung auch direkt zu berechnen zu

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = 10\cdot\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Literatur:

[Sto] A. Stolzenburg. Projektive Geometrie, Stuttgart 2009